

N° D'ORDRE

1727

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. HENRI BEGHIN

Maitre de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE THÉORIQUE DES COMPAS GYROSTATIQUES

ANSCHÜTZ ET SPERRY.

2^e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le ⁹ 20 Novembre 1922 devant la Commission d'Examen

MM. G. KÖENIGS, *Président,*

E. BOREL,

E. CARTAN.

} *Examineurs.*

PARIS

1922

N° D'ORDRE

1727

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. HENRI BEGHIN

Maitre de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier

1^{re} THÈSE. — ÉTUDE THÉORIQUE DES COMPAS GYROSTATIQUES

ANSCHÜTZ ET SPERRY.

2^e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9^u Novembre 1922 devant la Commission d'Examen

MM. G. KÖNIGS, *Président,*

E. BOREL,

E. CARTAN.

Examineurs.



PARIS

1922

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen..... MOLLIARD, *Professeur*. Physiologie végétale.

Doyen honoraire..... P. APPELL.

Professeurs honoraires } P. PUISEUX
VÉLAIN.
BOUSSINESQ.
BOUTY.

Emile PICARD. . . . Analyse supérieure et algèbre supérieure.
Gaston BONNIER . . Botanique.

KCENIGS. Mécanique physique et expérimentale.

GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.

HALLER Chimie organique.

JOANNIS. Chimie (Enseignement P. C. N.).

JANET Electrotechnique générale.

WALLERANT Minéralogie.

ANDOYER Astronomie.

PAINLEVÉ. Mécanique analytique et mécanique céleste.

HAUG Géologie.

H. LE CHATELIER Chimie générale.

Gabriel BERTRAND Chimie biologique.

Mme P. CURIE . . . Physique générale et radioactivité.

CAULLERY. Zoologie (Evolution des êtres organisés).

C. CHABRIÉ. . . . Chimie appliquée.

G. URBAIN Chimie minérale.

Emile BOREL . . . Calcul des Probabilités et Physique mathém.

MARCHIS Aviation.

Jean PERRIN . . . Chimie physique.

G. PRUVOT Anatomie et physiologie comparées.

ABRAHAM. Physique.

CARTAN Mécanique rationnelle.

Cl. GUICHARD. . . Géométrie supérieure.

Professeurs..... LAPICQUE. Physiologie.

GENTIL Géographie physique.

VESSIOT. Théorie des groupes et calcul des variations.

COTTON Physique générale.

DRACH. Application de l'analyse à la géométrie.

C. FABRY Physique.

Charles PÉREZ . . Zoologie.

Léon BERTRAND . . Géologie appliquée et géologie régionale.

DANGEARD Botanique (Enseignement P. C. N.).

LESPIEAU. Théories chimiques.

LEDUC. Physique théorique et physique céleste.

MONTEL Mathématiques générales.

MAURAIN Physique du globe.

HÉROUARD Zoologie.

Rémy PERRIER. . . Zoologie (Enseignement P. C. N.).

SAGNAC Physique théorique et physique céleste.

RABAUD. Biologie expérimentale.

PORTIER Physiologie.

BLAISE. Chimie organique.

PÉCHARD Chimie (Enseignement P. C. N.).

AUGER. Chimie analytique.

M. GUICHARD . . Chimie minérale.

GUILLET. Physique.

Secrétaire Daniel TOMBECK.

A **MONSIEUR P. APPELL**

Hommage respectueux et reconnaissant.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551419_0008

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

Pages.

1. Objet du mémoire.	5
2. Historique.	5

CHAPITRE PREMIER. — *Extension des équations de Lagrange et des équations de M. Appell aux systèmes comportant un asservissement.*

4. Liaisons.	7
5. Application du principe de d'Alembert.	8
6. Mécanismes comportant un asservissement.	10
7. Étude générale des systèmes comportant un asservissement. Principe de d'Alembert.	11
8. Cas particuliers.	15
14. Équilibre des systèmes comportant un asservissement.	17
15. Extension des équations de Lagrange.	18
16. Équation de la force vive.	19
17. Application.	20
18. Extension des équations de M. Appell.	21
21. Application.	26

CHAPITRE II. — *Compas gyrostatiques. Généralités.*

22. Axes de référence.	27
23. Influence de la rotation de la terre sur un gyrostat.	28
24. Méthode d'étude des appareils gyrostatiques.	30
25. Constance de la rotation d'un gyro entretenu électriquement.	31
26. Choix des paramètres.	32
27. Calcul de la force vive et de l'énergie d'accélération d'un système articulé.	35
28. Énergie d'accélération d'un gyrostat.	36
29. Gyrobalistique du compas Sperry.	37
30. Influence de la vitesse du navire sur un compas gyrostatique de type quelconque.	38
31. Généralités sur l'amortissement des oscillations d'un compas.	39

CHAPITRE III. — *Étude du compas Anschütz (1906).*

32. Principe. Étude élémentaire.	41
33. Dispositif amortisseur.	45
34. Erreur de latitude.	46
35. Étude élémentaire des déviations balistiques.	47
36. Mise en équations plus précise.	50
38. Oscillation du compas.	53

39. Déviations balistiques.....	55
40. Étude du roulis.....	57
41. Influence d'une variation de vitesse du gyro.....	59

CHAPITRE IV. — *Étude du compas Sperry à un gyrostal (1911).*

42. Principe. Étude élémentaire.....	59
43. Amortissement. Erreur de latitude.....	62
44. Étude élémentaire des déviations balistiques et du roulis.....	64
45. Mise en équations plus précise.....	67
46. Équilibre et oscillation libre.....	73
47. Calcul des amplitudes.....	74
48. Déviations balistiques. Roulis.....	75
49. Remarque.....	81
50. Modification Harrison-Rawlings (Slough). Principe.....	81
51. Mise en équations précise.....	82
52. Équilibre et oscillation libre.....	85
53. Déviations balistiques. Roulis.....	87

CHAPITRE V. — *Étude du compas Sperry à deux gyrostats (twin-gyro 1918).*

54. Description.....	90
55. Mise en équations précise.....	91
56. Équilibre.....	95
57. Oscillation libre.....	96
58. Calcul des amplitudes.....	100
59. Déviations balistiques. Roulis.....	102

CHAPITRE VI. — *Étude du compas Anschütz à trois gyrostats (1912).*

60. Description.....	106
61. Étude élémentaire de l'équilibre.....	107
62. Étude élémentaire des oscillations.....	107
63. Étude élémentaire des déviations balistiques.....	109
64. Mise en équations plus précise sans tenir compte du système amortisseur....	110
65. Étude de l'oscillation libre sans amortisseur.....	112.
66. Introduction d'un système amortisseur formé d'une cuve annulaire de section uniforme.....	114
67. Système amortisseur Anschütz.....	118
68. Étude de l'oscillation libre (amortisseur Anschütz).....	121
69. Réglage de l'amortissement.....	124
70. Étude des déviations balistiques. Roulis.....	125

ÉTUDE THÉORIQUE

DES

COMPAS GYROSTATIQUES ⁽¹⁾

ANSCHÜTZ ET SPERRY.

INTRODUCTION.

1. **Objet du mémoire.** — Les deux premiers chapitres contiennent l'exposé de méthodes générales permettant l'étude des compas existants et de ceux que l'on pourrait imaginer (équilibre apparent et petits mouvements).

Dans les chapitres suivants, ces méthodes sont appliquées, d'abord à l'*Anschütz 1906* qui, à cause de la simplicité de son principe, constitue un terme de comparaison intéressant pour apprécier les avantages des autres compas, puis au *Sperry (single-gyro)* et à la modification *Harrison-Rawlings (Slough)*, au *Sperry (twin-gyro)*, et enfin à l'*Anschütz à trois gyros*.

2. **Historique** ⁽²⁾. — La pensée d'utiliser un gyrostат pour mettre en évidence la rotation de la terre a été émise par plusieurs auteurs au milieu du XIX^e siècle; mais L. FOUCAULT ⁽³⁾, le premier, réalisa un appareil, qui permit une vérification qualitative. Ces expériences furent reprises sous une forme variée: en 1878, l'américain HOPKINS utilisa un gyro entretenu électriquement. En 1882, Ph. GILBERT ⁽⁴⁾ introduisit l'action de la pesanteur qui, plus tard, devait permettre la réalisation du compas gyrostatique. En 1884, W. THOMSON ⁽⁵⁾ suggéra des méthodes susceptibles

⁽¹⁾ Le mot *gyroscope* ayant été introduit par L. FOUCAULT (1, p. 421 à 424) pour désigner des appareils destinés à montrer «si et dans quel sens un corps auquel ils sont fixés poursuit sa rotation dans l'espace», il m'a semblé qu'il y avait intérêt à éviter cette expression lorsqu'il s'agit de désigner un corps de révolution mobile autour de son axe de figure dans une armature. J'emploierai donc la locution anglaise *gyrostatic compass*.

⁽²⁾ On trouvera des renseignements historiques et bibliographiques dans *Encyklopädie der Mat. Wiss.*, 1; A. WINKELMANN, 1, p. 187 à 189; dans Ph. GILBERT, 1; dans O. MARTIENSSEN, 1, 2; dans H. MAURER, 1; dans *The Sperry Gyrocompass...*, 7; voir aussi P. APPELL, 1, t. II, p. 273; F. KLEIN et A. SOMMERFELD, 1. Le *Lehrbuch für den Unterricht in der Navigation*, 3, contient une bibliographie intéressante sur la question particulière des compas.

⁽³⁾ L. FOUCAULT, 1.

⁽⁴⁾ Ph. GILBERT, 1.

⁽⁵⁾ W. THOMSON, 2; voir aussi A. GRAY, 1.

de déceler la rotation terrestre par un gyro et permettant de construire un compas gyrostatique. En même temps, E. DUBOIS⁽⁶⁾ réalisait un compas : essayé par la marine française il donna des écarts inférieurs à 5°. En 1886, ce fut le Hollandais MAXIMUS GERARDUS VAN DEN BOS. En 1904, A. FÖPPL⁽⁷⁾ réalisait un appareil entretenu électriquement qui permit une vérification quantitative assez précise. Puis ce furent les essais de H. ANSCHÜTZ-KAEMPFE qui, en 1906, aboutirent à la construction de son premier compas. Ce compas resta sans concurrent sérieux jusqu'à l'apparition, vers 1911, du compas américain *Sperry (single-gyro)* qui, grâce à un perfectionnement important (1914), montra un premier effort pour soustraire le compas aux causes perturbatrices à bord d'un bâtiment. Vers 1912, H. ANSCHÜTZ construisit un compas à trois gyros qui, parfaitement stabilisé dans tous les azimuts, se comporte bien au roulis. Puis la maison SPERRY construisit un compas à deux gyros, qui ne réalisa pas les avantages espérés ; elle adopta finalement la modification *Harrison-Rawlings* dite *Slough* imaginée au laboratoire de la marine anglaise⁽⁸⁾.

La théorie du compas gyrostatique sous la forme simple correspondant à l'Anschütz 1906 a fait l'objet de plusieurs articles : en 1904, A. FÖPPL⁽⁷⁾ donnait l'équation du mouvement de son appareil ; en 1906, O. MARTIENSSEN⁽⁹⁾ donnait les premiers éléments de la théorie de l'Anschütz, puis M. SCHULER, en 1910⁽¹⁰⁾. En 1911, O. MARTIENSSEN⁽¹¹⁾ donna l'équation du mouvement oscillatoire en tenant compte du système amortisseur, indiqua l'influence de la vitesse du bâtiment et étudia les déviations balistiques dues aux changements d'allure ou de cap ; mais il ne tint pas compte, dans cette étude, de l'inclinaison du compas dans le vertical E-W, qui constitue un inconvénient de l'Anschütz 1906. Il étudia enfin la déviation permanente causée par le roulis. On trouve dans F. KLEIN et A. SOMMERFELD⁽¹²⁾ une étude de l'oscillation, en tenant compte de la nutation pour des déviations en azimut d'amplitude finie⁽¹³⁾.

Le compas *Sperry (single-gyro)* ne semble avoir été l'objet que d'articles ou de notices théoriques élémentaires. Le principe du compas, l'influence des accélérations du bâtiment, l'influence du roulis y sont étudiés élémentairement⁽¹⁴⁾. Le pendule gyro-balistique, dont la fonction est de rester vertical malgré les accélérations du bâtiment est supposé la remplir et ne pas réagir sur l'élément sensible du compas. Cette question sera étudiée plus loin.

⁽⁶⁾ E. DUBOIS, 1.

⁽⁷⁾ A. FÖPPL, 1.

⁽⁸⁾ En Angleterre, G. BROWN construisit un compas dont on trouvera le principe dans G. BROWN, 1. Voir aussi ENGINEERING, 17.

⁽⁹⁾ O. MARTIENSSEN, 1.

⁽¹⁰⁾ M. SCHULER, 1.

⁽¹¹⁾ O. MARTIENSSEN, 2.

⁽¹²⁾ F. KLEIN et A. SOMMERFELD, 1, t. IV, p. 845 à 863.

⁽¹³⁾ Voir aussi H. LAMB, 1 ; P. LEMAIRE, 1 ; A. LUCAS, 1.

⁽¹⁴⁾ *The Sperry Gyrocompass*, 8. Le compas gyroscopique *Sperry*, 9. *The Sperry Gyrocompass*, 7, contient des considérations théoriques élémentaires par H. L. TANNER. Voir L. M. NULTON, 1. Voir aussi A. LUCAS, 1 ; A. LEPELLETIER, 1 ; A. BAULE, 1 ; J. PELUCHON, 1.

Les notices relatives au *Sperry* (*twin-gyro*)⁽¹⁵⁾ contiennent des raisonnements élémentaires très obscurs sur la manière dont le compas se comporte. Ce compas me paraît peu susceptible d'une étude élémentaire. L'étude théorique que j'en ferai montrera dans quelle mesure ces raisonnements sont justifiés.

J'étudierai enfin le compas Anschütz à trois gyrostats. Le *Lehrbuch* (note 2, p. 5) contient des considérations élémentaires sur ce compas. La notice⁽¹⁶⁾ n'en donne aucune théorie, même élémentaire⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾.

CHAPITRE PREMIER.

EXTENSION DES ÉQUATIONS DE LAGRANGE ET DES ÉQUATIONS DE M. APPELL AUX SYSTÈMES COMPORTANT UN ASSERVISSEMENT.

3. Les théorèmes généraux de la mécanique (en particulier le théorème du moment cinétique) sont commodes pour une étude élémentaire des compas, mais leur application à une étude plus précise présente des difficultés d'ordre pratique, que l'on peut éviter par l'emploi des équations de Lagrange ou des équations de M. Appell.

Je vais rappeler les conditions dans lesquelles ces équations s'appliquent ; je montrerai que ces conditions ne sont pas réalisées dans les systèmes qui, comme les compas Sperry, comportent un asservissement, mais j'indiquerai les modifications à apporter pour permettre cette application.

4. **Liaisons.** — Si les paramètres $q_1, q_2, \dots, q_n$ dont dépendent la configuration et la position d'un système sont liés par un certain nombre d'équations finies de la forme

$$\varphi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0,$$

on dit que le système est *holonome* ; il en est ainsi, par exemple, d'un système de solides invariables en contact entre eux et avec des obstacles étrangers fixes ou de mouvement connu d'avance en fonction de t .

⁽¹⁵⁾ *The Sperry Gyrocompass Mark III*, 11 ; *Elementary theory of two gyro compass*, 12 : *Le compas à deux gyroscopes Sperry*, 13. Voir dans J. PELECHON, 1, une étude théorique.

⁽¹⁶⁾ *Le compas gyroskopique Anschütz*, 6. Voir note 76, p. 106.

⁽¹⁷⁾ J'ai donné (H. BÉGIN, 2) quelques résultats théoriques relatifs au compas Sperry (*twin-gyro*) et au compas Anschütz à trois gyros.

⁽¹⁸⁾ On trouvera dans G. BROWN, 1, des considérations élémentaires intéressantes sur les compas gyrostatiques. Voir aussi G. B. HARRISON, 1, F. MARGUET, 1.

Si certaines liaisons s'expriment par des équations non intégrables entre les paramètres et leurs dérivées par rapport au temps, le système est dit *non holonome*. Il en est ainsi, par exemple, de solides assujettis à rouler les uns sur les autres sans glisser. Les équations qui traduisent ces conditions sont linéaires par rapport aux dérivées premières des paramètres : ce sont des *liaisons linéaires du premier ordre* ⁽¹⁹⁾.

Dans ce que je viens de rappeler, les liaisons sont considérées à un point de vue purement *analytique*, indépendamment de la manière particulière dont elles sont réalisées.

Or, *peut-on faire abstraction de la manière dont une liaison est réalisée?* En d'autres termes, le mouvement d'un système est-il entièrement déterminé par les équations de liaison et par les valeurs initiales des paramètres $q_1, q_2, \dots, q_n$ et de leurs dérivées premières?

La question a fait l'objet de nombreuses études ⁽¹⁹⁾; je résumerai quelques-uns des résultats relatifs aux systèmes holonomes et aux systèmes non holonomes avec liaisons linéaires du premier ordre.

Une liaison L d'un système Σ peut être réalisée avec ou sans le secours d'un système auxiliaire Σ_1 . Dans le premier cas, la réalisation de la liaison est dite *parfaite*, si l'introduction de ce système n'apporte aucune restriction aux déplacements infiniment petits du système Σ qui sont, par suite, tous les déplacements compatibles avec la liaison L . Elle est *imparfaite*, s'il y a restriction des déplacements infiniment petits.

Ainsi, par exemple, le dispositif suivant, cité par M. DELASSUS, réalise imparfaitement la liaison $z = a$ imposée à un point matériel de coordonnées x, y, z : la fourche d'un monocycle de rayon a est maintenue verticale au moyen d'un trépied reposant sur le plan P ($z = 0$). Le monocycle touche le plan P , et le frottement est supposé suffisant pour que tout glissement soit impossible. Au centre du monocycle est attaché le point matériel.

Le point constitue le système Σ ; le monocycle, la fourche, le trépied constituent le système auxiliaire Σ_1 .

Ce dispositif permet évidemment au point matériel d'occuper toutes les positions du plan Q ($z = a$), et réalise, par suite, la liaison donnée; mais il la réalise *imparfaitement*, car, dans tout déplacement infiniment petit du système $\Sigma\Sigma_1$, le déplacement du point matériel est évidemment dans le plan de la roue, donc n'a pas une direction arbitraire dans le plan Q : il y a restriction.

Si, au contraire, on attachait le point au centre d'une sphère de rayon a roulant sans glisser sur le plan P , on obtiendrait une réalisation *parfaite* de la même liaison.

On vérifie facilement qu'une réalisation imparfaite provient nécessairement de liaisons non holonomes.

5. Application du principe de d'Alembert. — Les liaisons L

⁽¹⁹⁾ Voir à ce sujet P. APPELL, 1 à 5; J. HADAMARD, 1; E. DELASSUS, 1, 2; P. APPELL, 2, donne de nombreuses indications bibliographiques.

imposées à un système Σ étant réalisées au moyen d'un système auxiliaire Σ_1 , j'applique le principe de d'Alembert au système $\Sigma\Sigma_1$: le travail virtuel des forces d'inertie, des forces données et des forces de liaison est nul dans tout déplacement, en particulier dans tout déplacement compatible avec les liaisons du système $\Sigma\Sigma_1$, telles qu'elles existent à l'instant t .

Si les forces de liaison, c'est-à-dire les forces dont le but est d'assurer les diverses liaisons, *ont un travail nul dans chacun de ces déplacements*, si, d'autre part, les forces d'inertie du système Σ_1 sont négligeables (masse de Σ_1 négligeable), ainsi que les forces données appliquées à Σ_1 , les forces d'inertie du système Σ et les forces données qui lui sont appliquées figurent seules dans l'équation de d'Alembert.

Si le système Σ_1 réalise *parfaitement* les liaisons, les déplacements du système Σ compatibles avec les liaisons du système $\Sigma\Sigma_1$ sont les mêmes que les déplacements compatibles avec les liaisons L , de sorte que l'équation de d'Alembert est la même et s'applique aux mêmes déplacements que si les liaisons L étaient réalisées sans le secours de Σ_1 . *Le mouvement du système Σ est déterminé par les équations qui expriment les liaisons L , et par les valeurs initiales des paramètres et de leurs dérivées premières (positions et vitesses initiales). Il est indépendant de la manière dont les liaisons L sont réalisées, en particulier du système auxiliaire Σ_1 .*

Si, au contraire, Σ_1 réalise *imparfaitement* les liaisons L , l'application du principe de d'Alembert au système $\Sigma\Sigma_1$ ne donne qu'une partie des équations susceptibles de déterminer le mouvement, qui *dépend, par suite, du mode de réalisation des liaisons*.

Mais ces résultats supposent essentiellement que le travail des forces de liaison est nul dans tous les déplacements compatibles avec les liaisons, telles qu'elles existent à l'instant t .

Or, malgré le caractère assez général laissé le plus souvent à la nature des forces de liaison, il ne semble pas que les auteurs aient eu en vue — pour me borner aux liaisons du premier ordre — des liaisons exprimant autre chose que des conditions de contact, ou de roulement sans glissement ou sans pivotement, des forces de liaison autres que les forces de contact correspondantes. Les obstacles étrangers sont supposés fixes ou de mouvement connu d'avance en fonction de t .

Dans ces conditions, l'hypothèse fondamentale énoncée ci-dessus sur la valeur nulle du travail des forces de liaison équivaut à la suivante sur la nature des corps considérés :

La résistance au roulement est négligée en tous les contacts; là où il y a pivotement, la résistance au pivotement est aussi négligée; là où il y a glissement, la réaction est, en outre, supposée normale : en d'autres termes, *toute cause de dissipation d'énergie est négligée*.

Ces propositions s'appliquent à des systèmes de solides invariables, et s'étendent à des liquides incompressibles, à des fils ou à des membranes parfaitement flexibles et inextensibles, à condition qu'il n'y ait pas viscosité ou raideur, d'une manière générale à tout système qui ne soit susceptible

ni de contraction, ni de dilatation. et ne présente aucun phénomène comportant dissipation d'énergie.

Laissant de côté les systèmes susceptibles de contraction ou de dilatation, je reviens à la question posée ci-dessus (§ 4) :

Peut-on faire abstraction de la manière dont une liaison est réalisée?

Il semble, d'après ce qui vient d'être rappelé, que la réponse doive être affirmative, toutes les fois qu'il s'agira de systèmes ne comportant pas de dissipation d'énergie et de réalisations parfaites. En particulier, il semble que ce soit le cas de liaisons holonomes sans frottement.

Je vais montrer qu'il n'en est rien : il existe, au contraire, une catégorie importante de mécanismes qui réalisent les liaisons par une méthode toute différente de celles qui viennent d'être examinées. Pour ces mécanismes, la réponse à la question précédente est négative : *on ne peut faire abstraction du mode de réalisation des liaisons.*

6. Mécanismes comportant un asservissement. — Les liaisons réalisées par ces mécanismes peuvent être quelconques; elles sont le plus souvent holonomes. Mais, au lieu que ces réalisations soient, pour ainsi dire, passives, obtenues par simple contact, elles utilisent des forces quelconques (forces électromagnétiques, pression d'air comprimé, etc.), en un mot, *des sources d'énergie auxiliaires, qui entrent en jeu automatiquement, et sont automatiquement dosées de manière à réaliser à chaque instant telle ou telle liaison.* On peut même imaginer un être animé agissant par contact, et réglant son action de manière à réaliser telle ou telle liaison.

Soit un solide Σ , par exemple un disque, mobile autour d'un diamètre Δ sous l'influence de certaines forces données. Un solide Σ_1 , par exemple un anneau concentrique, de diamètre Δ , est mobile autour de Δ sans avoir aucun contact avec Σ . L'anneau Σ_1 porte une roue dentée a d'axe Δ , engrenant avec un pignon b calé sur l'arbre d'un moteur M . Il est facile d'imaginer un dispositif⁽²⁰⁾ qui, sans agir directement ni sur Σ ni sur Σ_1 , mette le moteur M en marche, dans un sens ou dans l'autre, toutes les fois que Σ et Σ_1 ne sont pas dans un même plan. Si α et α_1 sont les azimuts de Σ et de Σ_1 , la liaison

$$\alpha = \alpha_1$$

se trouve ainsi réalisée : de sorte que l'anneau Σ_1 suit le disque Σ dans tous ses mouvements autour de Δ , sans être entraîné par lui. Il est évident que la manière dont se comporte ce système n'a rien de commun avec la manière dont il se comporterait si Σ entraînait Σ_1 par contact direct : si, par exemple, un petit ressort fixé à Σ_1 s'appuie sur Σ , le système prendra une rotation uniformément accélérée dans le cas de l'asservissement, alors qu'il resterait évidemment immobile dans la seconde hypothèse.

Quelles sont, dans l'exemple précédent, les forces de liaison du système?

⁽²⁰⁾ Voir la description du Compas Sperry (*The Sperry Gyrocompass*, 7).

Si je considère le système $\Sigma\Sigma_1$, ces forces sont, d'une part, les réactions le long de l'axe Δ qui sont des forces de liaison ordinaires, et les réactions du pignon b sur la roue a . Ces réactions, qui jouent un rôle capital dans le problème, ont un caractère tout à fait spécial, car le pignon b (obstacle étranger) qui les exerce n'est pas fixe, ni de mouvement connu d'avance en fonction de t : c'est un obstacle dont la position est connue d'avance en fonction des paramètres (ici α, α_1) dont dépend le système considéré $\Sigma\Sigma_1$.

Si j'englobe dans le système considéré le rotor R du moteur M , les forces de liaison sont, outre les actions de contact des obstacles fixes et les actions au contact $R\Sigma_1$, qui sont des forces de liaison ordinaires, les actions électromagnétiques auxquelles le rotor est soumis de la part du stator. Ces forces ont, en effet, le caractère des forces de liaison : elles sont inconnues, mais on sait qu'elles ont la valeur qu'il faut pour assurer la liaison considérée.

Dans tout déplacement élémentaire compatible avec la liaison $\alpha = \alpha_1$, les forces de liaison ordinaires ont un travail nul; au contraire, les autres forces de liaison — qu'il s'agisse des réactions d'obstacles étrangers dont la position dépend des paramètres α, α_1 , ou de ces actions électromagnétiques s'exerçant à distance sur le rotor — ont un travail différent de zéro. Et c'est en cela que les mécanismes comportant un asservissement se distinguent des autres.

7. Étude générale des mécanismes comportant un asservissement. Principe de d'Alembert. — Soit un système matériel Σ ne présentant aucune cause de dissipation d'énergie. Je suppose en outre qu'aucune partie de ce système ne soit susceptible de contraction ou de dilatation, à l'exception de ce qui sera admis ci-dessous.

En tenant compte des contacts qui lui sont imposés, ce système est supposé dépendre d'un nombre limité h de paramètres $q_1, q_2, \dots, q_h$, de telle manière que les coordonnées x, y, z de chaque élément de Σ soient des fonctions connues d'avance de ces paramètres et, peut-être aussi, du temps t :

$$(1) \quad x = f(q_1, \dots, q_h, t); \quad y = \dots; \quad z = \dots.$$

Certains des obstacles étrangers avec lesquels Σ est en contact sont fixes, ou dépendent de t ; d'autres, par suite des contacts imposés, sont supposés dépendre d'un certain nombre k des paramètres précédents, soit $q_1, \dots, q_k$, et, peut-être aussi, de t .

Ces conditions de contact sont des *liaisons holonomes par contact*.

Je suppose en outre le système soumis à certaines relations non holonomes, c'est-à-dire que les paramètres $q_1, \dots, q_h$ sont liés par un certain nombre p de relations différentielles exprimant des conditions de roulement sans glissement ou sans pivotement en certains contacts. Ces relations permettraient d'exprimer les p variations élémentaires

$$dq_{n+1}, dq_{n+2}, \dots, dq_{n+p} \quad (n + p = h),$$

en fonction de $dq_1, dq_2, \dots, dq_n$ et de dt ; elles sont de la forme

$$(2) \quad (p \text{ relations}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 dq_1 + \dots + A_h dq_h + A dt = 0, \\ B_1 dq_1 + \dots + B_h dq_h + B dt = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Ces conditions sont des *liaisons non holonomes par contact*. Ce sont ces deux seuls types de liaisons que l'on rencontre dans les problèmes courants.

Dans tout déplacement élémentaire compatible avec les liaisons, telles qu'elles existent à l'instant t , c'est-à-dire dans lesquelles δt est nul, et $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ arbitraires, les réactions mutuelles entre les corps du système ont un travail nul, ainsi que les réactions d'obstacles fixes ou dépendant de t . Je dirai que ces réactions sont des *forces de liaison de première espèce*.

Le système Σ est supposé soumis, en outre, à d'autres liaisons, que j'appellerai *liaisons par asservissement*, s'exprimant, elles aussi, par des équations finies ou par des équations différentielles linéaires, mais réalisées au moyen de forces tout à fait différentes : ces forces, que j'appellerai *forces de liaison généralisées* ou de *deuxième espèce*, sont appliquées à des corps du système : elles peuvent être *extérieures* ou *intérieures*.

Dans le premier cas, ce sont, soit des actions à distance, électromagnétiques ou autres, qui sont réglées *automatiquement* de manière à assurer la liaison finie ou différentielle qu'elles sont chargées de réaliser, soit les actions de contact des obstacles étrangers, dont la position a été supposée dépendre de $q_1, \dots, q_k, t$, et dont le mouvement doit être réglé *automatiquement* de telle manière que certaines équations finies ou différentielles soient vérifiées à chaque instant par les paramètres q ⁽²¹⁾.

Si ces forces de liaison de deuxième espèce sont intérieures, ce sont, soit des actions à distance, électromagnétiques, soit des efforts intérieurs dans des corps susceptibles de contraction ou de dilatation (air comprimé, muscles d'un être animé), efforts qui sont réglés *automatiquement* — par exemple, par la volonté de l'être animé — de manière à réaliser telle ou telle liaison ⁽²²⁾.

Le système Σ pourra être constitué par un moteur électrique dont la vitesse ω serait indépendante de la charge, comme serait, par exemple, dans certaines limites, un moteur-dérivation. La liaison d'asservissement ainsi réalisée serait de la forme

$$d\theta = \omega dt.$$

⁽²¹⁾ Il est intéressant de remarquer que ces actions de contact ont un caractère mixte, étant associées, d'une part, à des liaisons par contact, et, d'autre part, à des liaisons par asservissement.

⁽²²⁾ Sauf cette exception, comme il a été admis au début de ce paragraphe, le système ne sera pas supposé compressible.

Le système pourra être constitué par un cycliste et sa machine; le cycliste pourra contracter ses muscles, non pas d'une quantité donnée, mais d'une quantité dosée de telle manière que certaines liaisons se trouvent réalisées : il réglera l'action de ses jambes de manière à réaliser une vitesse angulaire constante, ou bien il contractera les muscles du corps de manière à réaliser une inclinaison du cadre fonction de t , etc. Les méthodes indiquées ci-dessous permettront d'étudier la variation des paramètres inconnus.

On pourrait imaginer aussi, comme application, un navire Σ dont une partie σ de la cargaison serait mise en mouvement automatiquement par un moteur, de manière à réaliser certaines liaisons : on pourrait, par exemple, comme condition d'asservissement, obtenir que le navire restât constamment vertical, ce qui réaliserait un stabilisateur de roulis; un petit appareil gyrostatique, basé sur le principe du stabilisateur Schlick, indiquerait à bord la verticale vraie; le moteur d'asservissement entrerait en action dès que cette verticale ne serait pas dans le plan de symétrie du navire. On pourrait aussi régler le mouvement de σ de manière à réaliser telle relation entre sa position et l'inclinaison du navire. On pourrait ainsi changer à volonté la période d'oscillation du navire et éviter, le cas échéant, le synchronisme de la houle. On pourrait régler le mouvement de σ de manière à réaliser telle relation entre sa position et la vitesse angulaire du navire, ce qui permettrait d'amortir les oscillations, etc. Les forces de liaison de deuxième espèce seraient ici les actions mutuelles de Σ et de σ .

Un système matériel présentant des forces de liaison de deuxième espèce sera dit *comporter un asservissement*. Il est manifeste que *le travail virtuel des forces de liaison de deuxième espèce est généralement différent de zéro*.

Ces définitions posées, je suppose que les relations d'asservissement soient au nombre de r , les unes finies, les autres différentielles, de la forme

$$(3) \quad (r \text{ relations}) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(q_1, \dots, q_k, t) = 0; \dots; \\ \varepsilon_1 dq_1 + \varepsilon_2 dq_2 + \dots + \varepsilon_k dq_k + \varepsilon dt = 0; \dots \end{array} \right.$$

Les déplacements virtuels du système, compatibles avec les liaisons *par contact*, telles qu'elles existent à l'instant t ($\delta t = 0$), s'obtiennent en prenant arbitrairement $h - p$ des variations élémentaires $\delta q_1, \dots, \delta q_k$; les p autres étant définies par les relations (1) qui se réduisent ici à

$$(2') \quad (p \text{ relations}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 \delta q_1 + \dots + A_k \delta q_k = 0, \\ B_1 \delta q_1 + \dots + B_k \delta q_k = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Parmi ces déplacements, il en existe pour lesquels on peut affirmer *a priori* que le travail des forces de liaison de deuxième espèce est nul,

tions (2) et les r relations (3), soit $h - k + p + r$ relations à $h + p$ inconnues. Le problème est déterminé, si le nombre d'équations d'asservissement est égal au nombre k de paramètres dont dépend le système auxiliaire Σ_1 .

11. 4° Les hypothèses étant celles du paragraphe précédent (10 3°), je suppose, en outre, que les liaisons par contact du système soient toutes holonomes ($p = 0$); les multiplicateurs Λ , M , ... deviennent, eux aussi, inutiles, et les équations (10) se réduisent aux $h - k$ suivantes :

$$(17) \quad P_{k+1} = Q_{k+1}, \quad \dots, \quad P_h = Q_h,$$

auxquelles il y a lieu d'adjoindre les r équations (3) exprimant l'asservissement. Les inconnues sont uniquement $q_1, \dots, q_k$.

12. **Remarque.** — 1° Dans les systèmes sans asservissement, les déplacements virtuels auxquels on applique l'équation de d'Alembert sont ceux qui sont compatibles avec toutes les liaisons. Dans les systèmes comportant un asservissement, ce sont des déplacements tout différents : on a ainsi en évidence les raisons analytiques de la différence qui existe entre ces deux catégories de systèmes, et l'on conçoit tout l'intérêt qui s'attache, au point de vue industriel, aux mécanismes qui comportent un asservissement.

13. 2° Dans le cas où les forces de liaison de deuxième espèce sont uniquement les réactions d'obstacles mobiles dont la position est fonction de certains paramètres q (§ 10, § 11), la solution du problème est indépendante de l'inertie de ces corps et des forces données qui leur sont appliquées.

Si donc, dans un système soumis à r relations d'asservissement, on peut faire deux parts Σ , Σ_1 , telles que le système partiel Σ ne soit soumis à aucune force de liaison de deuxième espèce, en dehors des réactions du système Σ_1 , si, d'autre part, le nombre de paramètres dont dépend ce système Σ_1 est égal au nombre de conditions d'asservissement, l'inertie et les forces données appliquées à Σ_1 n'influent pas sur le mouvement de Σ ; la méthode indiquée aux paragraphes 10 et 11 permet de mettre le problème en équations sans introduire ni ces forces d'inertie, ni ces forces données. Le système partiel joue alors un rôle auxiliaire. Ce cas particulier se présente fréquemment dans les applications.

14. **Équilibre des systèmes comportant un asservissement.** — Le principe de d'Alembert donne les conditions d'équilibre, si l'on y supprime les P , termes provenant des forces d'inertie du système considéré. Les équations (10) relatives au cas général et les équations (12), (14), (16) ou (17) relatives aux cas particuliers étudiés donnent donc les équations d'équilibre, si l'on y remplace les P par zéro. A ces équations il

y a lieu d'adjoindre celles des équations d'asservissement qui sont finies; les équations différentielles exprimant des liaisons non holonomes, que ce soit par contact ou par asservissement, ne sont évidemment pas à adjoindre : elles sont identiquement vérifiées.

15. Extension des équations de Lagrange. — Les conditions étant les conditions générales définies au paragraphe 7, les coordonnées x, y, z des différents éléments du système considéré Σ s'expriment par des expressions finies (§ 7, éq. 1) en fonction du temps t et des paramètres $q_1, \dots, q_h$ dont dépend le système lorsqu'on ne tient compte que des liaisons holonomes par contact; on établit dans les traités de mécanique rationnelle⁽²⁴⁾ que l'expression

$$P = \Sigma m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q} + y'' \frac{\partial y}{\partial q} + z'' \frac{\partial z}{\partial q} \right)$$

a pour valeur

$$P = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q},$$

q désignant l'un quelconque des paramètres $q_1, \dots, q_h$; $\dot{q}$ sa dérivée par rapport au temps, $2T$ désignant l'expression de la force vive du système Σ en fonction de $q_1, \dots, q_h; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_h, t$.

On étendra ainsi les équations de Lagrange aux systèmes comportant un asservissement, en remplaçant $P_1, \dots, P_h$ par ces expressions dans les équations (10) du paragraphe 7⁽²⁵⁾.

Dans les cas particuliers définis aux paragraphes 9 et 11, les équations de Lagrange prennent la forme simple bien connue

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

q désignant l'un quelconque des paramètres $q_{m+1}, \dots, q_h$ dans le cas du

⁽²⁴⁾ P. APPELL, 1, t. II, p. 309.

⁽²⁵⁾ Je rappelle, en vue des applications, que la force vive d'un solide invariable mobile autour d'un point fixe O est (P. APPELL, 1, t. II, p. 147)

$$2T = f(p, q, r) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq,$$

p, q, r désignant les projections de la rotation instantanée sur trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz , fixes ou non,

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1$$

étant l'équation, rapportée à ces mêmes axes, de l'ellipsoïde d'inertie de centre O.

Si les axes Ox, Oy, Oz sont les axes principaux, la formule se réduit à ses trois premiers termes.

S'il s'agit d'un solide animé d'un mouvement quelconque, il faut ajouter à la force vive du solide dans son mouvement autour du centre de gravité, qui a la forme que je viens d'indiquer, la force vive MV_0^2 qu'aurait la masse M du solide, si elle était concentrée au centre de gravité (théorème de Koenig; P. APPELL, 1, t. II, p. 56).

paragraphe 9, et l'un quelconque des paramètres $q_{k+1}, \dots, q_h$ dans le cas du paragraphe 11.

Il est essentiel de remarquer que la force vive doit se calculer en fonction de $q_1, \dots, q_h, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_h, t$, sans tenir aucun compte des liaisons d'asservissement. Il en est de même du travail élémentaire $Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_h \delta q_h$ des forces données. Si ces forces admettent une fonction des forces, c'est-à-dire si $Q_1, \dots, Q_h$ sont les dérivées $\frac{\partial U}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_h}$ d'une fonction U de $q_1, \dots, q_h, t$, cette fonction U sera calculée sans s'occuper de l'asservissement. Ce n'est que dans les équations elles-mêmes, c'est-à-dire dans les expressions $Q, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right)$ qu'il pourra en être tenu compte. Cependant, la dérivée de $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ par rapport à t étant prise dans le mouvement réel, lequel est compatible avec les liaisons d'asservissement, on pourra effectuer sur $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ toutes les simplifications résultant de ces liaisons avant de dériver par rapport à t . En résumé, on pourra tenir compte de l'asservissement après avoir terminé le calcul des trois catégories d'expressions $Q, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$.

16. Équation de la force vive. — Les liaisons par contact étant supposées ne pas dépendre de t , en particulier, les équations (2) qui représentent les liaisons non holonomes n'ayant pas de termes en dt ($A=B=\dots=0$), les forces données étant supposées admettre la fonction des forces $U(q_1, \dots, q_h)$, je multiplie les équations (10) donnant le mouvement dans le cas général, par $dq_1, \dots, dq_h$, variations élémentaires des paramètres dans le déplacement réel, l'expression

$$P_1 dq_1 + \dots + P_h dq_h$$

donne le travail changé de signe des forces d'inertie

$$\Sigma m(x'' dx + y'' dy + z'' dz),$$

c'est-à-dire la différentielle dT de la demi-force vive.

L'expression

$$Q_1 dq_1 + \dots + Q_h dq_h$$

est égale à dU ; le multiplicateur Λ a pour coefficient

$$A_1 dq_1 + \dots + A_h dq_h,$$

qui est nul, puisque le déplacement vérifie les équations (2); il en est de même pour les coefficients analogues $M, \dots$.

On a donc l'équation

$$d(T - U) + \lambda(a_1 dq_1 + \dots + a_k dq_k) + \mu(b_1 dq_1 + \dots + b_h dq_h) + \dots = 0.$$

On voit que $T - U$ n'est pas constant; les termes en $\lambda, \mu, \dots$ représentent le travail élémentaire des forces de liaison de deuxième espèce qui n'est pas nul en général, les conditions (4) n'étant pas imposées au déplacement réel. Suivant son signe, ce travail correspond, pour le système Σ considéré, à un *apport* ou à une *dépense d'énergie mécanique*.

Il en est de même dans chacun des cas particuliers définis aux paragraphes 9, 10, 11 : la combinaison des forces vives ne donne pas l'expression $d(T - U)$, car une partie seulement des expressions $P_1, \dots, P_h, Q_1, \dots, Q_k$ figurent dans les équations du mouvement.

Il est intéressant d'en conclure que *l'asservissement pourra permettre d'augmenter ou de diminuer à volonté l'énergie mécanique d'un système, en particulier d'amortir les oscillations d'un système ne présentant aucune cause de dissipation d'énergie*.

17. Application. — Soit, dans un plan fixe, une plaque Σ articulée en un point C à un plateau circulaire Σ_1 , mobile autour de son centre O. Une force F constante, parallèle à une droite fixe Ox, s'exerce sur la plaque Σ en un point A situé sur la droite qui joint C au centre de gravité G. Un moteur d'asservissement M agit par engrenages sur le plateau Σ_1 , de manière à réaliser constamment la liaison

$$(1) \quad \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$[\alpha = (Ox, OC); \quad \beta = (Ox, CA); \quad OC = R; \quad CA = a; \quad CG = b].$$

La liaison d'asservissement étant unique, et, d'autre part, le plateau Σ_1 dépendant d'un seul paramètre α , le système Σ , pris isolément, rentre dans le cas particulier défini au paragraphe 11 : on pourra donc appliquer les équations de Lagrange à la plaque Σ seule; on voit que la masse du plateau Σ_1 sera sans influence sur le mouvement. La force vive de Σ est

$$2T = M(R^2\alpha'^2 + b^2\beta'^2 + 2Rb\alpha'\beta'\cos(\alpha - \beta) + k^2\beta'^2),$$

Mk^2 désignant le moment d'inertie de Σ en G.

Le travail virtuel de la force F est

$$d\mathcal{C} = F\delta(R\cos\alpha + a\cos\beta).$$

Seule, l'équation relative à β est à écrire :

$$(4) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \beta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} = -Fa\sin\beta.$$

Or,

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = M(b^2 \beta' + R b \alpha' \cos(\alpha - \beta) + k^2 \beta') = M(b^2 + k^2) \beta';$$

si l'on tient compte de la liaison d'asservissement (§ 15); d'autre part,

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = M R b \alpha' \beta' \sin(\alpha - \beta) = M R b \beta'^2.$$

L'équation du mouvement est donc

$$(5) \quad M(b^2 + k^2) \beta'' - M R b \beta'^2 + F c \sin \beta = 0.$$

Si la liaison $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ était réalisée par contact direct entre Σ et Σ_1 , le mouvement serait tout différent : il serait régi par l'équation

$$(6) \quad [M(R^2 + b^2 + k^2) + I_1] \beta'' + F(a \sin \beta + R \cos \beta) = 0,$$

I_1 désignant le moment d'inertie du plateau en O. L'équation (5) donnerait facilement le mouvement : β'^2 s'obtient en ajoutant un terme sinusoidal en β à un terme exponentiel : β varie entre deux limites, dont l'une peut être rejetée à l'infini. L'équation (6) donnerait, au contraire, un mouvement pendulaire.

Les positions d'équilibre s'obtiennent en annulant le second membre de l'équation (4). On trouve ainsi les deux positions pour lesquelles la force F passe par C ; l'équation (6) donnerait, au contraire, les positions pour lesquelles la force $\bar{F}$ passe par O.

18. Extension des équations de M. Appell. — Les équations de M. Appell ⁽²⁶⁾ présentent, comme le fait remarquer l'auteur, les avantages suivants : 1° elles sont susceptibles de s'appliquer aux systèmes soumis à des liaisons non holonomes, sans qu'on ait à introduire, comme inconnues auxiliaires, un système de multiplicateurs ; 2° elles permettent l'emploi de paramètres auxiliaires liés aux coordonnées véritables $q_1, \dots, q_h$ par des relations différentielles.

Par exemple, dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, si p, q, r , désignent les projections sur trois axes de la rotation instantanée, il peut être avantageux d'utiliser les paramètres auxiliaires λ, μ, ν liés à p, q, r par les relations

$$d\lambda = p \, dt; \, d\mu = q \, dt; \, d\nu = r \, dt;$$

$d\lambda, d\mu, d\nu$ sont ainsi les angles élémentaires dont il faut faire tourner le solide autour de ces trois axes pour passer de la position qu'il occupe à l'instant t à celle qu'il occupe à l'instant $t + dt$.

⁽²⁶⁾ P. APPELL, 1, t. II, p. 374; 3.

Soit donc un système Σ remplissant les conditions indiquées au paragraphe 7. En tenant compte des liaisons holonomes par contact qui lui sont imposées, sa position dépend des h paramètres $q_1, \dots, q_h$ et peut-être de t , de telle sorte que les coordonnées de chaque élément de matière sont des fonctions finies de la forme

$$(1) \quad x = f(q_1, \dots, q_h, t); \quad y = \dots; \quad z = \dots.$$

A ces paramètres, je suppose adjoints s paramètres auxiliaires $q_{h+1}, \dots, q_{h+s}$ liés aux précédents par des relations différentielles leur servant de définitions, relations auxquelles ne correspond par suite aucune force de liaison. Je les range avec les relations exprimant les liaisons non holonomes par contact, car elles interviendront de la même manière dans la mise en équations.

J'ai ainsi p relations différentielles ($p \geq s$) de la forme

$$(2) \quad (p \text{ relations}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 dq_1 + \dots + A_{h+s} dq_{h+s} + A dt = 0, \\ B_1 dq_1 + \dots + B_{h+s} dq_{h+s} + B dt = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Je suppose des liaisons par asservissement représentées par r relations finies ou différentielles :

$$(3) \quad (r \text{ relations}) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(q_1, \dots, q_{h+s}, t) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \varepsilon_1 dq_1 + \dots + \varepsilon_{h+s} dq_{h+s} + \varepsilon dt = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Enfin, les déplacements virtuels annulant le travail des forces de liaison de deuxième espèce sont ceux qui vérifient les j relations

$$(4) \quad (j \text{ relations}) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \delta q_1 + \dots + a_{h+s} \delta q_{h+s} = 0, \\ b_1 \delta q_1 + \dots + b_{h+s} \delta q_{h+s} = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Cela posé, je forme l'expression

$$S = \frac{1}{2} \sum m (x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

20. Cas où les déplacements qui annulent le travail virtuel des forces de liaison de deuxième espèce sont définis par j relations de la forme

$$(11) \quad \delta q_1 = 0, \dots, \delta q_j = 0.$$

Les hypothèses étant celles du paragraphe précédent, je suppose que les conditions qu'un déplacement doit remplir, pour annuler le travail virtuel des forces de liaison de deuxième espèce, aient la forme simple (11). On pourra d'ailleurs toujours se placer dans ce cas en introduisant au besoin des paramètres auxiliaires convenablement choisis, comme il a été indiqué au paragraphe 18.

Dans ce cas, qui est, en somme, le cas général, si l'on conduit les calculs comme il vient d'être dit, les équations (10) se simplifient et prennent la même forme que dans le cas d'un système sans asservissement

$$(12) \quad \frac{\delta S}{\delta q_{j+1}''} = Q_{j+1}; \dots; \frac{\delta S}{\delta q_n''} = Q_n.$$

On voit que les équations de M. Appell donnent une solution générale de la question, sous une forme plus simple que les équations de Lagrange. A ces $n - j$ équations, il y a lieu d'adjoindre les p équations (5) et les r équations (3) d'asservissement. Si $r = j$, le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues ⁽²⁷⁾.

⁽²⁷⁾ Je rappelle, en vue des applications, que, si un solide est mobile autour d'un point fixe O, si p, q, r désignent les projections de la rotation instantanée sur les arêtes d'un trièdre de référence $Oxyz$, fixe ou animé d'un mouvement quelconque donné en fonction de t ou des paramètres du problème, si P, Q, R sont les projections, sur ces mêmes axes, de la rotation instantanée du trièdre lui-même, les projections, sur ces axes, de l'accélération du point de coordonnées x, y, z sont données par la formule suivante, et par les deux analogues déduites par permutation circulaire (P. APPELL, 1, t. II, p. 379; 3) :

$$J_x = -x(p^2 + q^2 + r^2) + p(px + qy + rz) + (q' - Q_1)z - (r' - R_1)y;$$

j'ai posé

$$P_1 = qR - rQ; Q_1 = rP - pR; R_1 = pQ - qP.$$

Si les axes sont fixes ou invariablement liés au solide, P_1, Q_1, R_1 sont nuls.

L'énergie d'accélération du solide est définie par la relation (P. APPELL, 1, t. II, p. 393, ex. 16, 3)

$$\begin{aligned} 2S = & f(p' - P_1, q' - Q_1, r' - R_1) + (p' - P_1) \left(q \frac{\partial f}{\partial r} - r \frac{\partial f}{\partial q} \right) + (q' - Q_1) \left(r \frac{\partial f}{\partial p} - p \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ & + (r' - R_1) \left(p \frac{\partial f}{\partial q} - q \frac{\partial f}{\partial p} \right) + \dots \end{aligned}$$

la fonction $f(x, y, z)$ ayant la signification indiquée plus haut (note 25, p. 18). Les termes non écrits, ne contenant pas les dérivées secondes des paramètres, n'ont pas à être calculés, car ils n'interviennent pas dans les équations de M. Appell.

S'il s'agit d'un solide animé d'un mouvement quelconque, l'énergie d'accélération se calcule par un théorème analogue au théorème de Kœnig (P. APPELL, 1, t. II, p. 381) :

$$2S = MJ_0^2 + 2S_1$$

(J_0 , accélération du centre de gravité G; S_1 , énergie d'accélération dans le mouvement autour de G).

21. Application. — Un plan matériel P peut glisser par translation sur un plan fixe xOy horizontal. Sur ce plan, une sphère Σ de rayon R peut rouler sans glisser. Le mouvement du plan P est réglé automatiquement de manière que le centre de la sphère tourne uniformément autour de Oz à la vitesse ω par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz . Étudier le mouvement au moyen des équations de M. Appell.

Soient u, v les coordonnées d'un point A marqué sur le plan P par rapport aux axes Ox, Oy, Oz . La position de ce plan est définie par ces deux seuls paramètres. La position de la sphère est définie par les coordonnées ξ, η de son centre, et, par exemple, par les angles d'Euler φ, θ, ψ qui définissent son orientation.

Si p, q, r sont les projections sur les axes de la rotation instantanée de la sphère, les conditions exprimant le roulement sans glissement s'obtiennent en écrivant que l'élément matériel de la sphère et l'élément matériel du plan qui sont en coïncidence à l'instant t ont la même vitesse :

$$(1) \quad \xi - qR = u'; \quad \eta' + pR = v'.$$

Les liaisons d'asservissement sont au nombre de deux :

$$(2) \quad d\xi + \omega \eta dt = 0; \quad d\eta - \omega \xi dt = 0.$$

Le nombre de ces relations étant égal au nombre de paramètres dont dépend la position du plan P, on pourra résoudre la question en appliquant les équations de M. Appell à la sphère Σ seule.

En tenant compte uniquement des liaisons holonomes par contact, la sphère sera considérée comme dépendant des sept paramètres $u, v, \xi, \eta, \varphi, \theta, \psi$ ($h=7$); il y a intérêt à y joindre trois paramètres auxiliaires ($s=3$) liés aux précédents par les relations

$$(3) \quad d\lambda = p dt; \quad d\mu = q dt; \quad dv = r dt.$$

Ces $h+s=10$ paramètres sont liés par ces trois relations et par les deux relations (1) qui expriment les liaisons non holonomes par contact. Ces relations (1) peuvent s'écrire

$$(1') \quad d\xi - R d\mu = du; \quad d\eta + R d\lambda = dv.$$

Les relations (3) et (1') sont les p relations différentielles (§ 18, éq. 2) de la théorie générale ($p=5$).

Sur les $h+s=10$ paramètres, je conserve $h+s-p=n=5$ paramètres; je choisis u, v, ξ, η, v ; j'exprime l'énergie d'accélération S de la sphère en fonction des dérivées secondes de ces n paramètres, en utilisant les $p=5$ relations (3) et (1'). Or (note 27, p. 25) la valeur de S est définie par

$$2S = M(\xi''^2 + \eta''^2) + \frac{2}{5} MR^2(p'^2 + q'^2 + r'^2),$$

ou, d'après (3) et (1'),

$$2S = M(\xi''^2 + \eta''^2) + \frac{2}{5} M[(v'' - \eta'')^2 + (\xi'' - u'')^2 + R^2 v''].$$

Les déplacements virtuels annulant le travail des forces de liaison de deuxième espèce sont définis par les $j = 2$ conditions

$$(5) \quad \delta u = 0, \quad \delta v = 0,$$

puisque ces forces sont les réactions du plan sur la sphère. Ces conditions ont la forme indiquée au paragraphe 20 (éq. 11), de sorte que les équations du mouvement sont de la forme (§ 20, éq. 12)

$$(6) \quad \frac{\partial S}{\partial \xi''} = \Xi; \quad \frac{\partial S}{\partial \eta''} = H; \quad \frac{\partial S}{\partial v''} = N;$$

les seconds membres sont nuls, puisque les forces données (poids de la sphère) ont un travail nul, j'obtiens les équations

$$(7) \quad 7\xi'' = 2u''; \quad 7\eta'' = 2v''; \quad v'' = 0,$$

qui, jointes aux équations (2) d'asservissement, résolvent la question. Ces cinq équations s'intègrent immédiatement et montrent que le point A décrit une cycloïde. Les formules (1') montrent que le vecteur de rotation instantanée reste parallèle aux génératrices d'un cône oblique dont la base est un cercle horizontal décrit à la vitesse angulaire ω .

CHAPITRE II.

COMPAS GYROSTATIQUES. GÉNÉRALITÉS.

22. Axes de référence⁽²⁸⁾. — L'étude des compas gyrostatiques peut se faire en rapportant les mouvements, soit à des axes joignant le centre de la terre à trois étoiles, soit à des axes liés invariablement à la terre.

⁽²⁸⁾ Dans ce qui suivra, le sens positif des rotations autour d'un axe orienté Oz sera toujours le sens de droite à gauche pour un observateur ayant les pieds en O, la tête en z. Les angles situés dans un plan perpendiculaire à un axe orienté seront mesurés, avec, comme sens positif, le sens positif des rotations autour de cet axe.

Les trièdres de référence Oxyz seront trirectangles; le sens de Ox vers Oy sera le sens positif des rotations autour du troisième axe Oz.

Les notices industrielles et les articles relatifs aux compas gyrostatiques utilisent le premier système de référence⁽²⁹⁾. J'utiliserai le second : *je rapporterai donc les mouvements à la terre.*

Cette méthode a l'avantage de faire porter les raisonnements sur les mouvements *tels qu'on les observe*. La recherche de la position d'équilibre d'un compas gyrostatique se ramène immédiatement à un problème de statique. Dans l'autre méthode, c'est un problème de dynamique, le compas tournant autour de la ligne des pôles. L'oscillation du compas se présente comme un problème de petits mouvements autour d'une position d'équilibre, au lieu d'être une oscillation autour d'un mouvement stable.

Je rappelle⁽³⁰⁾ que des axes liés à la terre invariablement peuvent être traités comme absolus, sensiblement, sous les conditions suivantes :

- 1° Ne pas tenir compte de l'attraction des astres autres que la terre;
- 2° Composer l'attraction de la terre sur un corps avec la force centrifuge due à sa rotation autour de la ligne des pôles, ce qui donne son *poids*;
- 3° Adjoindre aux forces appliquées à un corps *ses forces d'inertie de Coriolis* $-mJ_c$ dues à la rotation du système de référence autour de la ligne des pôles⁽³¹⁾.

Les lois de la mécanique, telles qu'on les applique aux phénomènes industriels courants, ne tiennent compte que des conditions 1° et 2°. La troisième condition est indispensable pour rendre compte des phénomènes où l'influence de la rotation de la terre se fait sentir.

Je traiterai donc un problème de compas gyrostatique comme un problème quelconque, *en adjoignant aux forces appliquées au système, telles qu'on les considère habituellement (poids, réactions, forces électromagnétiques, etc.), les forces d'inertie de Coriolis de ses éléments*. Ces forces sont purement *factives*, mais elles interviendront au même titre que les forces extérieures.

23. Influence de la rotation de la terre sur un gyrostat.

— La rotation de la terre étant très lente ($\varepsilon = 7 \times 10^{-5}$), les forces de Coriolis d'un corps sont petites, à moins que sa vitesse ne soit grande. Elles acquièrent une valeur appréciable s'il s'agit d'un gyrostat tournant à grande vitesse.

⁽²⁹⁾ Je rappelle que ces axes peuvent être traités sensiblement comme absolus, à condition de ne pas tenir compte de l'attraction des astres autres que la terre (H. BEGHIN, 1, t. I, p. 78 à 81).

⁽³⁰⁾ H. BEGHIN, 1, t. I, p. 81 à 85.

⁽³¹⁾ Cette accélération de Coriolis J_c est ici le double du produit vectoriel $\vec{\varepsilon} \times \vec{v}$, $\vec{\varepsilon}$ désignant le vecteur qui représente la rotation de la terre (direction du pôle sud vers le pôle nord; $\varepsilon = 0,000072$); $\vec{v}$, la vitesse de l'élément m par rapport à la terre.

Le produit vectoriel $\vec{V} \times \vec{V}'$ de deux vecteurs V, V' , dont les projections sur des axes rectangulaires sont $XYZ, X'Y'Z'$, est un vecteur qui leur est perpendiculaire; ses projections sur ces mêmes axes sont

$$YZ' - ZY'; \quad ZX' - XZ'; \quad XY' - YX'.$$

Les forces de Coriolis d'un gyrostат équivalent à un couple⁽³²⁾. Je vais reprendre rapidement le calcul de ce couple, qui est susceptible d'une interprétation remarquable, très précieuse pour la théorie des compas gyrostatiques.

Soit un gyro de révolution tournant à la vitesse Ω autour de son axe de figure Oz par rapport à la terre. Sa rotation est représentée par le vecteur $\vec{\Omega}$ ⁽³³⁾; celle de la terre par le vecteur $\vec{\varepsilon}$, que je suppose dans le plan yOz [$\theta = (O\varepsilon, O\Omega)$]. Les projections du vecteur ε sur les axes sont

$$0, \quad \varepsilon \sin \theta, \quad \varepsilon \cos \theta.$$

Celles de la vitesse v par rapport à la terre de l'élément de masse m , de coordonnées x, y, z , sont

$$-\Omega y, \quad \Omega x, \quad 0.$$

La force de Coriolis (note 30, p. 28) a donc pour projections

$$2m\Omega \varepsilon x \cos \theta, \quad 2m\Omega \varepsilon y \cos \theta, \quad -2m\Omega \varepsilon y \sin \theta.$$

Les composantes F_x suivant Ox des forces de Coriolis des différents éléments du gyro, étant deux à deux symétriques par rapport au plan yOz , équivalent à zéro; il en est de même des composantes F_y suivant Oy , deux à deux symétriques par rapport au plan zOx . Les composantes F_z suivant Oz équivalent à un couple d'axe Ox , car les forces de Coriolis de deux éléments symétriques par rapport au plan zOx forment un couple d'axe Ox . L'axe du couple résultant est le moment résultant des composantes F_z par rapport à Ox ; sa valeur est

$$-\Sigma y(2m\Omega \varepsilon y \sin \theta) = -I\Omega \varepsilon \sin \theta,$$

I désignant le moment d'inertie du gyro par rapport à son axe de figure.

Cette valeur de l'axe du couple formé par les forces de Coriolis s'interprète très simplement de la manière suivante :

Pour étudier l'influence de la rotation de la terre sur un gyro, dont on rapporte le mouvement à la terre, on peut raisonner comme si la terre ne tournait pas, à condition de supposer l'axe NS du gyro aimanté et placé dans un champ magnétique rigoureusement parallèle à la ligne des pôles. Les forces Φ et Φ' de cette aimantation fictive ont la valeur

$$\Phi = \Phi' = \frac{I\Omega \varepsilon}{NS} \quad (\varepsilon = 7 \times 10^{-5}),$$

⁽³²⁾ L'expression de ce couple est donnée par H. RÉSAL, 1, t. I, p. 433. Elle est donnée, sous une forme un peu différente, par A. LECHNER, 1.

⁽³³⁾ Ce vecteur est porté par l'axe de rotation Oz ; sa longueur est mesurée par Ω , vitesse angulaire; la rotation s'effectue dans le sens positif (note 28, p. 27) autour de l'axe orienté $O\Omega$.

le point N par lequel sort le vecteur Ω étant attiré vers le Nord, le point S vers le Sud.

On peut dire, si l'on préfère, que l'intensité de ce champ magnétique fictif est ε , le moment magnétique fictif du gyro est $I\Omega$.

Rien n'est à changer à cette règle s'il y a précession du gyrostat : comme il ne s'agira que de gyros tournant à grande vitesse, la précession sera, en effet, très lente, de sorte que, seule, la rotation propre du gyro interviendra de manière appréciable dans le calcul des forces de Coriolis. De même, il n'y a pas lieu de tenir compte des forces de Coriolis des armatures.

Cette interprétation fait ressortir d'une manière frappante l'analogie entre un gyrostat placé à la surface de la terre et une aiguille aimantée, et l'on entrevoit ainsi clairement la possibilité d'établir un compas gyrostatique.

24. Méthode d'étude des appareils gyrostatiques. — Pour étudier un appareil contenant des gyrostats, j'appliquerai soit les théorèmes généraux, en particulier le théorème de Resal⁽³⁴⁾, soit les équations de Lagrange, soit les équations de M. Appell (notes 24 et 26, p. 18, 21. S'il s'agit des deux compas Sperry, qui comportent un asservissement, les équations de Lagrange et les équations de M. Appell seront modifiées conformément aux indications du chapitre I.

J'emploierai tantôt l'une de ces méthodes, tantôt une autre, de manière à donner au lecteur différents moyens lui permettant d'aborder à son tour l'étude d'autres compas, ou de perfectionnements à apporter aux compas existants.

La méthode basée sur le théorème de Resal sera appliquée conformément au principe suivant :

Soit un gyro U, mobile autour de son axe de figure MN par rapport à une armature U_1 , laquelle est articulée suivant un axe M_1N_1 à une deuxième armature U_2 , elle-même articulée suivant l'axe M_2N_2 à un support fixe K.

Des forces données, telles que actions de ressorts, poids, aimantation fictive du gyro (§ 23), etc., agissent sur le système $U U_1 U_2$.

J'éliminerai les réactions le long des axes d'articulation en appliquant le théorème de Resal

1° Au gyro U, par rapport à un point fixe O, situé à l'instant t sur MN, et

⁽³⁴⁾ Un système matériel étant en mouvement, la vitesse de l'extrémité de son moment cinétique $O\gamma$ en un point fixe O (on dit aussi vitesse du vecteur $O\gamma$) est équipollente au moment résultant en O des forces extérieures (voir traités de mécanique).

Je rappelle, en vue des applications, les propriétés suivantes : un solide étant mobile autour d'un point fixe O, son moment cinétique au point O a les composantes A_p, B_q, C_r , suivant les axes principaux en O (A, B, C, moments principaux d'inertie; p, q, r composantes suivant ces axes de la rotation instantanée).

En un point O, le moment cinétique d'un solide animé d'un mouvement quelconque, s'obtient en composant le moment cinétique qu'aurait toute la masse, si elle était concentrée au centre de gravité G, avec le moment cinétique en G, dans le mouvement autour de G.

projetant sur MN les deux vecteurs dont ce théorème exprime l'équipollence (l'équation ainsi obtenue n'est pas différente de l'une des équations d'Euler appliquées au mouvement du gyro autour de son centre de gravité);

2° Au système UU_1 par rapport à un point fixe O_1 situé à l'instant t sur M_1N_1 et projetant sur M_1N_1 ;

3° Au système UU_1U_2 par rapport à un point fixe O_2 situé sur M_2N_2 et projetant sur M_2N_2 (l'équation obtenue n'est pas distincte de celle qui traduit le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe M_2N_2).

Il est intéressant de remarquer que, si la vitesse de rotation du gyro est grande, et si, ce qui arrive généralement dans ce cas, le mouvement des armatures est lent, les quantités de mouvement du système se réduisent sensiblement à celles qui sont fournies par les vitesses relatives des différents points du gyro par rapport à l'armature U_1 ; celles-ci forment un couple dont l'axe est porté par l'axe de figure MN du gyro et s'obtient en multipliant le vecteur-rotation Ω par I , moment d'inertie du gyro par rapport à MN.

Dans ce cas, où l'inertie gyrostatique est prépondérante (note 57, p. 54), les moments cinétiques $O\gamma$, $O_1\gamma_1$, $O_2\gamma_2$ auxquels j'applique le théorème de Resal dans la méthode que je viens d'exposer, sont sensiblement équipollents au vecteur $\vec{I\Omega}$, de sorte que, si l'on se contente de cette approximation, la méthode fait connaître la vitesse du vecteur γ et par suite celle du vecteur Ω par ses projections sur les trois axes d'articulation, d'où le mouvement du système.

25. Constance de la rotation d'un gyro entretenu électriquement. — Dans les compas gyrostatiques, le gyro forme le rotor d'un moteur d'induction triphasé; il est ainsi animé d'une vitesse de rotation constante Ω , le couple moteur C équilibrant les résistances passives dont le moment par rapport à l'axe de figure du gyro a la valeur N .

Si l'armature qui porte le gyro se meut avec une vitesse angulaire ayant pour projections P , Q , R sur l'axe du gyro et sur deux autres axes, la vitesse angulaire du gyro a pour projections $P+u$, Q , R , u désignant sa vitesse de rotation par rapport à l'armature. u est très considérable (de 10 000 à 20 000 tours par minute), P , Q , R sont finis, souvent même petits. J'appellerai généralement u vitesse de rotation propre du gyro, c'est la dérivée par rapport à t de φ , angle de rotation propre.

Le théorème de Resal (§ 24) appliqué au gyro dans son mouvement autour du centre de gravité, donne, en projetant sur l'axe de figure,

$$(1) \quad I \frac{d}{dt} (P + u) = C + N.$$

Or, en première approximation, C est proportionnel à la différence $u_0 - u$

qui existe entre la vitesse u et une certaine vitesse fixe u_0 pour laquelle C s'annulerait. Le coefficient de proportionnalité c est d'ailleurs petit, car il faut de grandes variations dans la vitesse pour rendre C sensible. Si le couple résistant N est supposé sensiblement constant, il a la valeur correspondant à l'allure de régime

$$(2) \quad c(u_0 - \Omega) + N = 0,$$

et l'équation (1) s'écrit

$$(3) \quad I \frac{d}{dt}(P + u) + c(P + u) = c(\Omega + P).$$

Si je suppose, par exemple, comme cela aura lieu le plus souvent, dans l'étude des petites oscillations, que P a une variation sinusoïdale

$$P = P_0 \sin st,$$

l'expression de $P + u$ qui vérifie l'équation (3) comprend un terme sinusoïdal dont l'amplitude, de l'ordre de grandeur de cP_0 , peut être négligée. le reste est de la forme

$$P + u = \Omega + me^{-\frac{ct}{I}}.$$

Le terme exponentiel montre que, dès que $P + u$ s'écarte de Ω si peu que ce soit, il est immédiatement rappelé vers lui; sa valeur reste donc toujours très voisine de Ω . *Dans ce qui suivra, je supposerai*

$$P + u = \Omega.$$

Cette hypothèse introduite équivaut à admettre l'égalité du couple moteur et du couple résistant ($C + N = 0$) qui s'exercent entre le gyro et son armature.

Lorsqu'on écrira les équations de Lagrange ou les équations de M. Appell, cette équation remplacera celle qui correspondrait au paramètre φ qui détermine la position du gyro à l'instant t par rapport à son armature.

26. Choix des paramètres. — Dans l'étude, qui sera faite plus loin, des petits mouvements d'un compas gyrostatique Σ , il sera commode de définir l'orientation d'un solide U de la manière suivante : soit OXYZ le trièdre de référence (OZ sera généralement vertical, OX dirigé vers le Nord; OY vers l'Ouest). Dans la position d'équilibre du système Σ , le solide U a une certaine position⁽³⁵⁾. Soit $CX'Y'Z'$ un trièdre inva-

⁽³⁵⁾ Il s'agit ici de la position d'équilibre idéale, pour laquelle le compas indiquerait exactement le Nord, la rose étant rigoureusement horizontale, etc., et non de la position réelle qui comporte généralement une petite erreur (influence de la latitude, de la vitesse, etc.)

riablement lié à U , choisi de telle manière que, dans cette position d'équilibre, il ait même orientation que $OXYZ$. Sa position, à l'instant t , sera voisine en direction de celle du trièdre fixe. J'appellerai $CX_1Y_1Z_1$ trièdre principal du solide U . En général CX , CY , CZ seront axes principaux d'inertie en C .

Cela posé, si j'amène le trièdre $OXYZ$ en $OX_1Y_1Z_1$ par une rotation de l'angle ζ autour de OZ , puis en $OX_2Y_2Z_2$ par une rotation de l'angle θ autour de OY_1 , et enfin en $OX_3Y_3Z_3$ par une rotation de l'angle λ autour

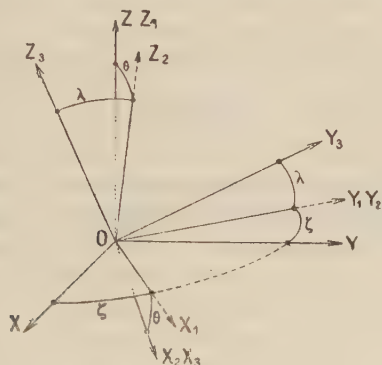


Fig. 1.

de OX_2 (fig. 1), je puis choisir ζ, θ, λ de manière que $OX_3Y_3Z_3$ ait la même orientation que $CX_1Y_1Z_1$. Ces trois paramètres définissent l'orientation du solide : ζ est l'*azimut* de CX , θ son *inclinaison*. Dans les petits mouvements du solide, ζ, θ, λ restent petits; il n'en serait pas de même des angles d'Euler.

Si, au solide U , est articulé un solide U_1 suivant un axe C_1X_1 parallèle à CX , la position de U_1 sera définie par ζ, θ, λ , et, en outre, par l'angle α dont il faut faire tourner autour de CX le trièdre principal du solide U pour l'orienter parallèlement au trièdre principal du solide U_1 ; on opérerait de même pour définir l'orientation d'un solide U_2 articulé à U_1 , en introduisant un nouveau paramètre β , etc.

Les cosinus directeurs fixant l'orientation des trièdres principaux des divers organes de Σ s'obtiennent simplement. Soient

	X	Y	Z		X'	Y'	Z'	
X	a	b	c	et	X	α	β	γ
Y	a'	b'	c'		Y	α'	β'	γ'
Z	a''	b''	c''			α''	β''	γ''

les deux tableaux donnant les cosinus des angles formés par les axes CX , CY , CZ avec les axes fixes OX , OY , OZ , d'une part, et, d'autre part, avec d'autres axes quelconques $C'X'$, $C'Y'$, $C'Z'$; on obtient le tableau donnant les cosinus directeurs de CX , CY , CZ par rapport à OX , OY , OZ , en multipliant deux à deux les colonnes de ces deux tableaux, ce qui donne

	X	Y	Z
X'	$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha''$	$b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha''$	$c\alpha + c'\alpha' + c''\alpha''$
Y'	$a\beta + a'\beta' + a''\beta''$	$b\beta + b'\beta' + b''\beta''$	$c\beta + c'\beta' + c''\beta''$
Z'	$a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma''$	$b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma''$	$c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma''$

Ainsi les cosinus directeurs des arêtes du trièdre principal du solide U défini par les angles ζ , θ , λ (fig. 1) s'obtiennent en multipliant deux à deux les colonnes des trois tableaux

	X	Y	Z		X_2	Y_2	Z_2		X_3	Y_3	Z_3
X_1	$\cos \zeta$	$\sin \zeta$	0	X_1	$\cos \theta$	0	$\sin \theta$	X_2	1	0	0
Y_1	$-\sin \zeta$	$\cos \zeta$	0	Y_1	0	1	0	Y_2	0	$\cos \lambda$	$-\sin \lambda$
Z_1	0	0	1	Z_1	$-\sin \theta$	0	$\cos \theta$	Z_2	0	$\sin \lambda$	$\cos \lambda$

Dans ce qui suivra, il suffira généralement de conserver dans ces cosinus directeurs les termes du second ordre en ζ , θ , λ , Exceptionnellement, le troisième ordre sera nécessaire.

La rotation instantanée de l'un des solides du système, dont la position dépend des paramètres ζ , θ , λ , α , ... , est la résultante des vecteurs $\zeta'\theta'$, $\lambda'\alpha'$, ... , portés par les axes de rotation OZ , OY_1 , OX_2 ,

J'aurai à utiliser les projections de cette rotation sur les arêtes du trièdre principal de ce solide. La remarque suivante donne simplement ces projections, lorsque les termes du second ordre suffisent. Soit, par exemple, à chercher la projection du vecteur λ' sur l'un de ces axes, faisant avec lui l'angle φ . Cette projection est

$$\lambda' \cos \varphi = \lambda' f(\zeta, \theta, \lambda, \alpha, \dots),$$

ou, en développant, et désignant pour abréger par $f(0)$ le nombre $f(0, 0, \dots)$, j'obtiens

$$\lambda' \cos \varphi = \lambda' [f(0) + \zeta f'_\zeta(0) + \theta f'_\theta(0) + \lambda f'_\lambda(0) + \dots].$$

L'angle φ sera généralement voisin de 0 ou de $\frac{\pi}{2}$. Dans le premier cas, $f(0)$ vaut 1, et, comme les termes suivants équivalent à $-\frac{\varphi^3}{2}$, leur produit par λ' n'est pas à retenir : la projection est λ' , au troisième ordre près. Si φ est voisin de $\frac{\pi}{2}$, $f(0)$ est nul. Le terme $\zeta f'_\zeta(0)$ se calcule directement sur la figure en cherchant la projection du vecteur λ' , lorsque, ζ ayant sa valeur, les autres paramètres $\theta, \lambda, \alpha, \dots$ ont la valeur zéro. On opère de même pour les termes en $\theta, \lambda, \alpha, \dots$, et pour les autres vecteurs $\zeta', \theta', \dots$.

27. Calcul de la force vive et de l'énergie d'accélération d'un système articulé. — Soit un solide U_1 en mouvement; à ce solide est articulé un solide U_2 en un point C. Pour calculer la force vive $2T$ du système $U_1 U_2$, lorsque la position de U_2 est définie en fonction de la position de U_1 , il est commode de calculer : 1° la force vive $2T_1$ du système formé par le solide et toute la masse M du solide U_2 concentrée en C; 2° l'expression $2T_2$ qu'il faut ajouter à $2T_1$ pour avoir $2T$.

Je vais calculer $2T_2$: soit OXYZ le trièdre fixe; Cxyz, un trièdre de sommet C, orienté parallèlement. Un élément m de U_2 à la vitesse V par rapport à OXYZ, v par rapport à Cxyz; V_0 étant la vitesse de C, on a

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{v};$$

en élevant au carré scalaire, j'obtiens pour la force vive de U_2 l'expression

$$\Sigma m V^2 = M V_0^2 + \Sigma m v^2 + 2 \Sigma m (\vec{V}_0 \cdot \vec{v});$$

d'où, pour la force vive $2T$ du système $U_1 U_2$, l'expression

$$2T = 2T_1 + \Sigma m v^2 + 2M (\vec{V}_0 \cdot \vec{v}_0),$$

v_0 désignant la vitesse, par rapport à Cxyz, du centre de gravité G du solide U_2 .

On calculera ce produit scalaire, au moyen de projections sur trois axes quelconques, par la formule connue donnant le produit scalaire de deux vecteurs V et V'

$$(\vec{V} \cdot \vec{V}') = XX' + YY' + ZZ'.$$

On opérera de même pour l'énergie d'accélération S : on obtient une formule entièrement analogue où la lettre j (accélération) remplace la lettre v (vitesse) :

$$2S = 2S_1 + \Sigma m j^2 + 2M (\vec{J}_0 \cdot \vec{j}_0).$$

28. **Énergie d'accélération d'un gyrost.** — Soit U_1 la boîte contenant le gyro, U_2 le gyro lui-même; soient $G\mathfrak{X}$, $G\mathfrak{Y}$, $G\mathfrak{Z}$, trois axes, issus de G , centre de gravité du gyro, et liés invariablement à la boîte, ce sont des axes principaux d'inertie du gyro. L'axe de figure étant suivant $G\mathfrak{X}$, soient I , B_2 , B_2 les moments principaux d'inertie du gyro. L'énergie d'accélération du système $U_1 U_2$ est la somme de S_1 , énergie d'accélération du système formé par U_1 et par la masse de U_2 concentrée en G , et de S_2 , énergie d'accélération de U_2 dans son mouvement autour de G . Je calcule S_2 en utilisant la note 27: u désignant la vitesse de rotation du gyro par rapport à sa boîte, j'ai ici

$$p = u + P, \quad q = Q, \quad r = R; \quad P_1 = 0, \quad Q_1 = -uR; \quad R_1 = uQ.$$

D'où, en n'écrivant que les termes susceptibles de contenir les dérivées secondes des paramètres,

$$(1) \quad 2S_2 = I(P' + u')^2 + B_2(Q' + uR)^2 + B_2(R' - uQ)^2 \\ + 2(I - B_2)(RQ' - QR')(u + P) + \dots$$

Or, le gyrost est entretenu électriquement, $P + u$ conserve la valeur constante Ω (§ 25), de sorte que $P' + u'$ est constamment nul; il est, par suite, inutile d'écrire le terme $I(P' + u')^2$, car, dans les dérivations qu'on doit effectuer pour écrire les équations de M. Appell, subsisterait un facteur $P' + u'$. J'ai donc à retenir, uniquement, les termes

$$(2) \quad 2S_2 = B_2(Q'^2 + R'^2) + 2(I\Omega - B_2P)(RQ' - QR') + \dots$$

Dans les problèmes de petites oscillations que j'aborderai, P , Q , R seront petits, Ω sera grand; Q et R seront particulièrement petits, car la composante P ne sera pas entravée par l'inertie gyrostatique; je conserverai alors dans les équations les carrés de P , négligeant les produits PQ , PR . Dans ces conditions, les termes $2B_2P(RQ' - QR')$ sont à négliger, car leurs dérivées contiendront l'un des facteurs PQ , PR . J'obtiens finalement l'expression simplifiée

$$(3) \quad 2S_2 = B_2(Q'^2 + R'^2) + 2I\Omega(RQ' - QR') + \dots$$

Au degré d'approximation indiqué, on aurait pour $2S_1$, dans le cas où U_1 a un point fixe O ,

$$(4) \quad 2S_1 = A_1P'^2 + B_1Q'^2 + C_1R'^2 + \dots$$

(A_1 , B_1 , C_1 étant les moments principaux d'inertie au point O , les axes principaux étant supposés parallèles à $G\mathfrak{X}$, $G\mathfrak{Y}$, $G\mathfrak{Z}$).

29. Application. Gyro-balistique du compas Sperry. — Ce dispositif (fig. 2) réalise une *pendule à longue période*. Un gyro u_3 est mobile autour de son axe m_3n_3 par rapport à une boîte u_2 , mobile autour d'un axe m_2n_2 par rapport à un pendule u_1 mobile autour d'un axe m_1n_1 fixe horizontal. Un ressort r relie u_1 à u_2 . Dans la position d'équilibre apparent, m_1n_1 , m_2n_2 , m_3n_3 sont perpendiculaires deux à deux, m_2n_2 est vertical, le ressort est sans action.

Soit OXYZ un trièdre fixe (OX suivant m_1n_1 , OZ vertical).

Soit a_1 le moment d'inertie par rapport à OX du système formé par u_1 et la masse du système u_2u_3 concentrée en c , centre de gravité commun à u_2 et à u_3 .

Soient a_2, b_2, c_2 les moments d'inertie de u_2 par rapport aux arêtes de son trièdre principal en c ; a_3, j, a_3 , ceux du gyro u_3 . J'étudie les petites oscillations en n'écrivant que les termes du premier ordre.

L'application du théorème de Resal au système u_2u_3 dans son mouvement autour de c donne, par projection sur m_2n_2 , l'équation

$$j\omega\alpha' + (a_2 + a_3)\beta'' = -k\beta.$$

Le théorème du moment cinétique appliqué au système $u_1u_2u_3$ par rapport à l'axe m_1n_1 donne

$$(a_1 + a_2 + a_3)\alpha'' - j\omega\beta' = -\varpi b\alpha$$

(ω , vitesse de rotation du gyro; $-k\beta$, moment par rapport à m_2n_2 de l'action du ressort sur u_2 ; ϖ , poids total; b , distance du centre de gravité du système à OX).

La variation de α ou de β se présente comme la superposition de deux oscillations de périodes $\frac{2\pi}{r_1}$ et $\frac{2\pi}{r_2}$, r_1 et r_2 étant les racines de l'équation bicarrée

$$[(a_2 + a_3)r^2 - k][(a_1 + a_2 + a_3)r^2 - \varpi b] - j^2\omega^2r^2 = 0.$$

$j\omega$ étant très grand, cette équation en r^2 a une racine infinie et l'autre voisine de zéro; la racine infinie est donc sensiblement égale à la somme des racines

$$r_1^2(a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3) = j^2\omega^2 + k(a_1 + a_2 + a_3) + \varpi b(a_2 + a_3);$$

l'autre s'obtient en divisant le produit par r_1^2 ; soit

$$r_2^2[j^2\omega^2 + k(a_1 + a_2 + a_3) + \varpi b(a_2 + a_3)] = k\varpi b.$$

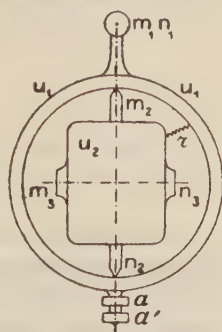


Fig. 2.

La première oscillation a le caractère d'une nutation extrêmement rapide, dont l'amplitude serait d'ailleurs très petite; l'autre oscillation seule est à retenir; sa période, en première approximation, est

$$T = 2\pi \frac{j\omega}{\sqrt{k\omega b}}.$$

Elle est d'autant plus grande que $j\omega$ est plus grand, que k et ωb sont plus petits⁽³⁶⁾.

30. Influence de la vitesse du navire sur un compas gyrostatique de type quelconque⁽³⁷⁾. — Un compas gyrostatique est un système matériel, comprenant un ou plusieurs gyros, qui prend une certaine position d'équilibre sous l'influence des forces données, qui sont l'aimantation fictive du ou des gyros, et les poids. Ces forces sont, les unes verticales, les autres parallèles à la ligne des pôles. Le compas est construit de telle manière que la ligne marquée $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ sur la rose s'oriente dans le plan de ces deux directions.

Ceci suppose le compas installé à terre ou à bord d'un bâtiment stoppé.

Qu'arrive-t-il si le bâtiment fait route à la vitesse v , dans la direction qui fait l'angle α avec l'horizontale Nord? Soient O le point du bâtiment où se trouve le compas, OX l'horizontale Nord, OY l'horizontale Ouest, OZ la verticale. Le mouvement du trièdre $OXYZ$ par rapport au trièdre $Txyz$ défini par le centre de la terre et par trois étoiles résulte de la rotation ε de la terre, d'une rotation $\varepsilon_1 = \frac{v}{R}$ (R , rayon de la terre) autour du diamètre perpendiculaire à OZ et à la vitesse v , et d'une rotation ε_2 autour de la verticale OZ , choisie de telle manière que OX soit à chaque instant orienté vers le Nord. ε_1 est beaucoup plus petit que ε : pour une vitesse de 30 nœuds, $\varepsilon_1 = 0,03 \varepsilon$; ε_2 est de l'ordre de grandeur de ε_1 .

Les lois de la mécanique par rapport aux axes $OXYZ$ sont analogues à celles de la mécanique terrestre: le poids devra être remplacé par la résultante de l'attraction de la terre et de la force d'inertie d'entraînement due au mouvement du trièdre $OXYZ$ par rapport au trièdre $Txyz$; sa direction est ainsi modifiée d'une quantité inappréciable de l'ordre du centième de degré au maximum. En outre l'aimantation fictive (§ 23) sera due à la résultante des champs ε , ε_1 et ε_2 . La ligne $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ de la rose s'orientera dans le plan vertical de cette résultante ou, ce qui revient au même, perpendiculairement à la vitesse du bâtiment par rapport à $Txyz$. Cette vi-

⁽³⁶⁾ Le ressort est quelquefois présenté comme un organe accessoire; il est, au contraire, capital; si le ressort n'existait pas ($k = 0$), l'appareil ne serait pas pendulaire: sous l'influence d'une force perturbatrice, il resterait vertical, pendant que le gyro précessionnerait autour de l'axe $m_2 n_2$, ceci jusqu'à ce que $m_3 n_3$ soit devenu parallèle à $m_1 n_1$; le pendule obéirait alors à la force perturbatrice. Si le gyro était invariablement lié au pendule, la période de l'oscillation serait la même que si le gyro n'existait pas, mais le pendule réagirait fortement sur ses appuis.

⁽³⁷⁾ Voir O. MARTIENSSSEN, 3,

tesse résulte de sa vitesse relative v et de la vitesse d'entraînement $V \cos L$ ($V = \varepsilon R$; L , latitude). Ses composantes suivant OX (Nord) et OY (Ouest) sont $v_x = v \cos \alpha$ et $v_r = v \sin \alpha - V \cos L$, de sorte que l'azimut ζ du compas, compté à partir de OX , est défini par⁽³⁸⁾

$$\operatorname{tang} \zeta = \frac{v \cos \alpha}{V \cos L - v \sin \alpha}$$

ou simplement

$$\zeta(\text{radians}) = \frac{v \cos \alpha}{V \cos L} = \frac{v_x}{V \cos L}.$$

31. Généralités sur l'amortissement des oscillations d'un compas. — Soit un système matériel soumis à des liaisons par contact indépendantes du temps. Je les supposerai holonomes dans ce qui suit, mais cette restriction n'est pas nécessaire. Je suppose que le système ne comporte pas d'asservissement. Dans ce système figurent un certain nombre de gyros entretenus électriquement.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ les paramètres fixant la position du système, φ l'angle de rotation propre de l'un des gyros (§ 25), I son moment d'inertie par rapport à l'axe de figure, Ω la vitesse angulaire maintenue électriquement.

Les forces données appliquées à ce système sont supposées dépendre d'un potentiel $V(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ [poids, actions de ressorts, etc.]. L'influence de la rotation de la terre remplit cette condition, car l'aimantation fictive qui la représente se compose de deux forces ε constantes en grandeur, direction et sens, appliquées en deux points fixes de l'axe de figure, distants de $I\Omega$ l'un de l'autre (§ 23).

Les équations de Lagrange s'appliquent à l'étude des petites oscillations de ce système. J'écrirai les équations correspondant aux paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ et les équations qui expriment la constance de la rotation des gyros (§ 25).

La vitesse de rotation d'un gyro projetée sur son axe de figure s'obtient en ajoutant à $\dot{\varphi}$ (vitesse de rotation propre) la projection de la vitesse angulaire de la boîte qui le contient. Celle-ci est une fonction linéaire homogène de $\alpha', \beta', \gamma', \dots$, dont les coefficients sont linéaires en $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, si l'on n'écrit que les termes du second ordre de manière à n'avoir dans les équations de Lagrange que des termes du premier ordre. La force vive du système se présente sous la forme (note 25, p. 18)

$$2T = 2T_0 + \Sigma I [\dot{\varphi}' + \alpha'(l + a\alpha + b\beta + \dots) + \beta'(m + c\alpha + d\beta + \dots) + \dots]^2,$$

le signe Σ s'étendant aux différents gyros, $2T_0$ ne contenant ni les $\dot{\varphi}$ ni les $\dot{\varphi}'$. Lord KELVIN et P. G. TAIT⁽³⁹⁾ ont étudié les conséquences générales

⁽³⁸⁾ Voir, dans F. KLEIN et A. SOMMERFELD, 1, t. IV, p. 845 à 863, une application numérique de cette formule.

⁽³⁹⁾ LORD KELVIN et P. G. TAIT, 1, t. I, p. 320 à 327.

de ce fait; je me place uniquement dans le cas particulier, objet du paragraphe. J'ai montré (§ 25) que, pendant le mouvement, on a

$$\Phi' + \alpha'(l + a\alpha + b\beta + \dots) + \beta'(m + c\alpha + d\beta + \dots) + \dots = \Omega;$$

tenant compte de cette équation, les équations correspondant à $\alpha, \beta, \dots$ s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \alpha'} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial \alpha} + \Sigma I \Omega [(a\alpha' + b\beta' + \dots) - (a\alpha' + c\beta' + \dots)] = - \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \beta'} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial \beta} + \Sigma I \Omega [(c\alpha' + d\beta' + \dots) - (b\alpha' + d\beta' + \dots)] = - \frac{\partial V}{\partial \beta}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Les termes en $I\Omega$ possèdent la propriété fondamentale suivante, qu'on vérifie immédiatement : l'équation correspondant à α ne contient pas de terme en $I\Omega\alpha'$; l'équation correspondant à β ne contient pas de terme en $I\Omega\beta'$; le terme en $I\Omega\beta'$ de l'équation correspondant à α et le terme en $I\Omega\alpha'$ de l'équation correspondant à β ont des coefficients $(b - c)$ et $(c - b)$ égaux en valeur absolue et de signes contraires.

Il en résulte que, si l'on forme l'équation de l'énergie en multipliant ces équations respectivement par $d\alpha, d\beta, \dots$, et les ajoutant, les termes en $I\Omega$ disparaissent et il reste uniquement

$$d(T_0 + V) = 0.$$

$T_0 + V$ peut s'appeler l'énergie apparente du système (*palpable energy*); c'est l'énergie qu'aurait le système, si le moment d'inertie de chaque gyro par rapport à son axe de figure était réduit à zéro⁽⁴⁰⁾. On voit que l'énergie apparente reste invariable pendant les oscillations, qui, par suite, ne sont pas amorties⁽⁴¹⁾. On ne peut donc espérer construire un compas utilisable avec un système du type défini.

⁽⁴⁰⁾ Si, dans le système donné S, on remplace chaque gyro par une tige matérielle rectiligne de manière à annuler I, on obtient un système S_0 ayant la force vive $2T_0$. Le système donné S se comporte comme se comporterait S_0 , si l'on faisait agir sur lui, en plus des forces de potentiel V, forces qui ne dépendent que de la position (*positional forces*), des forces dépendant de la vitesse (*motional forces*) introduisant dans les équations les termes en $I\Omega\alpha', I\Omega\beta', \dots$. Le caractère particulier de ces forces est dû aux propriétés indiquées des coefficients de ces termes. LORD KELVIN les appelle *gyroscopic forces* (note 38, p. 392).

⁽⁴¹⁾ Si, cherchant des solutions du système (1) de la forme

$$\alpha = Ae^{rt}, \quad \beta = Be^{rt}, \dots,$$

on écrit l'équation caractéristique sous la forme habituelle d'un déterminant égalé à zéro, on vérifie que cette équation en r ne contient que des termes de degré pair, par suite

L'amortissement ne pourra être obtenu qu'en introduisant des forces, intérieures ou extérieures, n'admettant pas de potentiel, et susceptibles d'absorber l'énergie.

Ce seront, par exemple, des résistances passives, frottements intérieurs ou extérieurs. Les frottements entre solides sont en général à écarter, comme apportant une certaine indétermination à la position d'équilibre apparent; seuls les frottements entre liquides, qui s'annulent avec la vitesse, sont utilisables (cuve à huile de l'Anschütz à trois gyros).

Ou bien ce seront des réactions de corps étrangers mobiles, comme sont les réactions de l'air ambiant sur les jets d'air sortant de l'Anschütz 1906.

Ce pourront être, enfin, des forces de liaison de seconde espèce correspondant à un asservissement (compas Sperry à un ou à deux gyros). *C'est le moteur d'asservissement qui, produisant automatiquement une source négative d'énergie, absorbe ici peu à peu l'énergie de l'oscillation.*

CHAPITRE III.

ÉTUDE DU COMPAS ANSCHÜTZ (1906).

32. Principe. Étude élémentaire ⁽⁴²⁾. — Le compas gyrostatique le plus simple consiste dans un gyro U_1 monté horizontalement dans un pendule U suspendu à un point fixe O (fig. 3). Je supposerai que la perpendiculaire OH abaissée de O sur l'axe $\mathcal{NS}$ du gyro est un axe de symétrie du pendule.

Je vais montrer que ce système a une position d'équilibre apparent pour laquelle l'axe $\mathcal{NS}$ est dans le méridien. En effet, d'après la loi fondamentale de la mécanique appliquée au système UU_1 , les forces d'inertie par rapport à la terre des éléments qui constituent le gyro, le poids P , l'aimantation fictive Φ, Φ' (§ 23), la réaction R en O forment un système de vecteurs équivalent à zéro. Or, dans la position d'équilibre apparent, les forces d'inertie du gyro s'équilibrent deux à deux, les forces P et R forment donc un couple équilibrant le couple

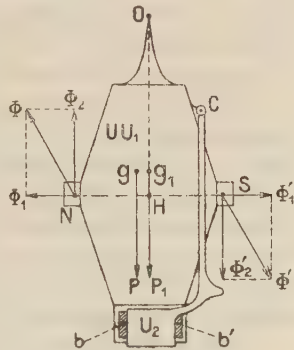


Fig. 3.

des propriétés particulières des coefficients des équations (1) : le remplacement de r par $-r$ ne fait, en effet, qu'échanger les lignes et colonnes, ce qui ne change pas l'équation. La solution générale du problème ne peut donc présenter de termes amortis sans présenter en même temps des termes divergents, incompatibles avec la stabilité implicitement admise.

⁽⁴²⁾ Voir en particulier H. ANSCHÜTZ, 1; *Der Kreiselkompass*, 5; O. MARTIENSSEN, 1 à 3; M. SCHULER, 1; F. KLEIN et A. SOMMERFELD, 1, t. IV, p. 845 à 863; P. LEMAIRE, 1.

$\Phi \Phi'$. Il en résulte que $\mathcal{NS}$ et Og sont dans le méridien; tout se passe comme si le gyro était remplacé par un barreau aimanté $\mathcal{NS}$.

Il y a intérêt (§ 41) à ce que, dans cette position d'équilibre, $\mathcal{NS}$ soit horizontal, d'où la nécessité de surcharger légèrement l'extrémité Nord, dans l'hémisphère Nord, d'une quantité croissant avec la latitude.

Pour l'étude élémentaire, il est commode de composer le poids P et les composantes verticales Φ_2, Φ'_2 de l'aimantation fictive en un seul vecteur P_1 égal à P appliqué en un point g_1 , lequel occupe une position fixe sur l'axe de symétrie du pendule (centre de trois vecteurs parallèles). Les forces données appliquées au compas sont alors P_1, R , et les composantes horizontales Φ_1, Φ'_1 de l'aimantation fictive. Dans la position d'équilibre, Φ_1 et Φ'_1 sont alignés suivant $\mathcal{NS}$, P_1 passe par O .

Je vais étudier les oscillations de ce compas lorsqu'on le dérange de sa position d'équilibre.

Soient ζ, θ, λ les trois angles (§ 26) qui définissent la position du trièdre principal $O\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ du pendule à l'instant t , le trièdre de référence étant OX , horizontale Nord; OY , horizontale Ouest; OZ verticale ascendante.

La rotation du gyro étant très rapide, les mouvements de l'axe $O\mathcal{X}$ parallèle à $\mathcal{NS}$ sont nécessairement très lents. Au contraire, pour chaque position de $O\mathcal{X}$, il est manifeste que le compas peut osciller librement dans un plan perpendiculaire.

Cette oscillation, si les conditions initiales ont pu lui donner naissance, s'amortit au bout d'un temps relativement court : j'étudie seulement le mouvement ultérieur.

Le compas n'oscillant pas autour de $O\mathcal{X}$, on peut admettre que l'inertie gyrostatique est prépondérante (note 57), et prendre comme moment cinétique un vecteur $O\gamma$ porté par $O\mathcal{X}$, ayant pour valeur la constante $I\Omega$. Ses projections sur OX, OY, OZ sont $I\Omega \cos \theta \cos \zeta, I\Omega \cos \theta \sin \zeta, -I\Omega \sin \theta$.

J'applique le théorème de Resal au compas entier : la vitesse du point γ est équipollente au moment résultant en O des composantes Φ_1, Φ'_1 de l'aimantation fictive et du poids P_1 . J'exprime cette équipollence en projetant sur $O\mathcal{X}$, sur OX et sur OZ .

$O\gamma$ étant constant, la vitesse de l'extrémité γ est perpendiculaire à $O\mathcal{X}$, de sorte que le moment de P_1 par rapport à $O\mathcal{X}$ est nul, c'est-à-dire que λ reste nul pendant le mouvement. (Il semble d'ailleurs intuitif que, pour chaque position de $O\mathcal{X}$, le point g_1 est situé le plus bas possible, c'est-à-dire dans le vertical de $O\mathcal{X}$).

Projetant sur OX et sur OZ , et posant $Og_1 = a$, j'obtiens

$$\begin{aligned} (1) \quad & I\Omega (\cos \theta \cos \zeta)' = aP \sin \theta \sin \zeta; \\ (2) \quad & -I\Omega (\sin \theta)' = -I\Omega \varepsilon \cos L \cos \theta \sin \zeta. \end{aligned}$$

L'équation (2) s'écrit

$$(2') \quad \theta' = \varepsilon \cos L \sin \zeta.$$

Rapprochée de (1), elle donne

$$(3) \quad I\Omega\varepsilon \cos L \cos \theta \cos \zeta + aP \cos \theta = \text{const.}$$

C'est l'équation du cône décrit par $O\lambda$. Ce cône est du 4^e ordre.

Si je porte $OA = 1$ sur $O\lambda$, le point A a pour coordonnées

$$x = \cos \theta \cos \zeta; \quad y = \cos \theta \sin \zeta; \quad z = -\sin \theta;$$

et l'équation (4) s'écrit

$$(4) \quad (I\Omega\varepsilon \cos L)^2 (x - x_0)^2 + a^2 P^2 (z^2 - 1) = 0,$$

x_0 désignant une constante arbitraire.

On voit que la courbe décrite par A, qui, par la définition de A, est tracée sur la sphère de centre O et de rayon 1, se projette sur le plan λOZ

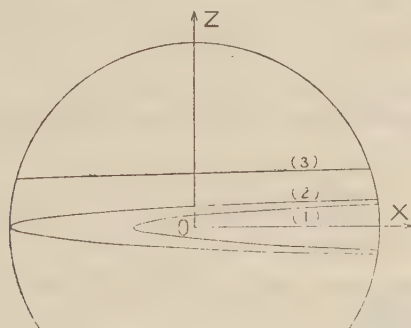


Fig. 4.

suivant une portion d'ellipse (fig. 4). Cette ellipse a son grand axe porté par OX; la valeur numérique de cet axe est considérable⁽¹³⁾, alors que la valeur du petit axe est 2, diamètre de la sphère. Il est intéressant de remarquer que, lorsqu'on change les conditions initiales, l'ellipse glisse le long de OX sans se déformer. Le mouvement est oscillatoire, si le sommet du grand axe est à une distance de O inférieure à 1 (courbe 1), il est révolutif dans le cas contraire (courbe 3); c'est ce qui arrive si l'inclinaison initiale du compas dépasse une certaine valeur, très faible d'ailleurs⁽¹⁴⁾.

La période de l'oscillation s'obtient simplement en remarquant que

⁽¹³⁾ Si le compas est du type Anschütz 1906, le rapport des deux axes de l'ellipse est de l'ordre de 1300, d'après les chiffres donnés par M. SCHULER, 1.

⁽¹⁴⁾ Le maximum de θ au cours d'une oscillation correspond au passage dans le méridien, la plus grande de ces valeurs correspond au cas limite (courbe 2) séparant le mouvement oscillatoire du mouvement révolutif. Un calcul élémentaire basé sur les chiffres de la

note 43 donne pour cette valeur maximum $\frac{2}{\sqrt{1300}} = 18$, soit 3° environ.

θ restant très petit, les carrés et produits de θ et de θ' sont négligeables; l'équation (1) s'écrit alors

$$(1') \quad -I\Omega\zeta' = aP\theta,$$

et donne, rapprochée de (2'), l'équation

$$(5) \quad I\Omega\zeta'' + aP\varepsilon \cos L \sin \zeta = 0.$$

L'azimut ζ du compas oscille donc suivant une loi rigoureusement *pendulaire* : si l'on compte le temps t à partir du moment où $O\lambda$ passe dans le méridien au-dessus de l'horizon, ζ et θ s'expriment en fonction de t par les fonctions elliptiques sn et cn ⁽⁴⁵⁾ :

$$(6) \quad \sin \frac{\zeta}{2} = \sin \frac{\zeta_0}{2} \operatorname{sn} \left(t \sqrt{\frac{aP\varepsilon \cos L}{I\Omega}} \right); \quad (\zeta_0, \text{ amplitude de } \zeta);$$

$$(7) \quad \theta \sqrt{\frac{aP}{I\Omega\varepsilon \cos L}} = -2 \sin \frac{\zeta_0}{2} \operatorname{cn} \left(t \sqrt{\frac{aP\varepsilon \cos L}{I\Omega}} \right);$$

La période de l'oscillation est donnée par l'intégrale elliptique

$$(8) \quad T = 2 \sqrt{\frac{2I\Omega}{aP\varepsilon \cos L}} \int_0^{\zeta_0} \frac{d\zeta}{\sqrt{\cos \zeta - \cos \zeta_0}}.$$

Si l'amplitude est petite, $\sin \zeta$ peut être remplacé par ζ dans l'équation (5), et l'on obtient

$$(9) \quad \zeta = \zeta_0 \sin \left(t \sqrt{\frac{aP\varepsilon \cos L}{I\Omega}} \right), \quad \theta = \zeta_0 \sqrt{\frac{I\Omega\varepsilon \cos L}{aP}} \cos \left(t \sqrt{\frac{aP\varepsilon \cos L}{I\Omega}} \right).$$

La période est

$$(10) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I\Omega}{aP\varepsilon \cos L}};$$

elle augmente avec la latitude.

Ces résultats s'appliquent à l'Anschütz 1906 qui est une application directe de ce principe : Le pendule U au lieu d'être fixé en un point O, flotte dans du mercure et c'est la poussée du mercure qui remplace la réaction en O; le point O lui-même est remplacé par le métacentre du flotteur. Une aiguille fixée au bâti qui porte la cuve à mercure centre le flotteur en empêchant tout déplacement latéral, mais son action n'est qu'accidentelle.

⁽⁴⁵⁾ Voir P. APPELL, 1, t. I, p. 433.

D'après les chiffres donnés par M. SCHULER (voir note 43, p. 43) et par F. KLEIN et A. SOMMERFELD (voir note 12, p. 6) on a, pour ce compas, à la latitude 50 degrés, dans le système C. G. S., les valeurs moyennes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = 20\,000 \frac{2\pi}{60} (20\,000 \text{ tours par minute}); I\Omega\varepsilon = 2 \times 10^4; \\ aP = 15 \times 10^6; T = 3\,800. \end{array} \right.$$

33. **Dispositif amortisseur.** — Reprenant le compas schématique défini au paragraphe 31, je vais chercher en quoi peut consister un dispositif amortisseur. J'ai déjà examiné la question (§ 30); je me placerai à un point de vue différent.

Il résulte de l'étude qui vient d'être faite que le point γ décrit une courbe fermée tracée sur une sphère de centre O. Il faut remplacer cette courbe par une sorte de spirale tendant asymptotiquement vers OX. On introduira, pour cela, de nouvelles forces, donnant ainsi à γ une nouvelle vitesse se composant avec l'ancienne et dirigée soit vers le plan horizontal XOY, soit vers le plan méridien XOZ.

Dans le premier cas, le moment de ces forces supplémentaires sera vertical; sa valeur, s'il s'agit de forces dépendant de la position, changera de signe avec θ , elle sera donc, en première approximation, de la forme $k\theta$ ($k > 0$); s'il s'agit de forces dépendant des vitesses, sa valeur, changeant de signe avec $\dot{\zeta}$, sera de la forme $-k\dot{\zeta}$.

Dans le second cas, le moment des forces supplémentaires sera horizontal, de la forme $-k\dot{\zeta}$ ou $-k\dot{\theta}$ ⁽⁴⁶⁾.

Analytiquement, la première de ces méthodes revient à ajouter au second membre de l'équation (2') avant la suppression du facteur $-I\Omega$, le terme $k\theta$ ou le terme $-k\dot{\zeta}$; la seconde revient à ajouter au second membre de l'équation (1') le terme $k\dot{\zeta}$ ou le terme $k\dot{\theta}$.

Dans les deux cas, on est évidemment conduit, pour les petites oscillations, à l'équation connue des oscillations amorties.

L'Anschütz 1906 présente une application de la première de ces deux méthodes : la boîte contenant le gyro est percée, près de l'axe $\mathcal{O}\mathcal{S}$, de deux ouvertures, par où l'air peut pénétrer. Cet air, entraîné par la rotation du gyro, est rejeté vers la périphérie, et s'évacue à l'extérieur en b et b' symétriquement par rapport au plan $\mathcal{N}\mathcal{O}\mathcal{Z}$ de l'équateur du gyro. Une palette U_2 , articulée suivant un axe parallèle à $\mathcal{O}\mathcal{N}$, pend à la manière d'un pendule, et masque partiellement les ouvertures b , b' .

Aux forces extérieures considérées au paragraphe précédent, il y a lieu

⁽⁴⁶⁾ Le travail élémentaire de ces forces serait, suivant le cas,

$k\theta d\zeta$ ou $-k\dot{\zeta} d\theta$, $-k\dot{\zeta}' d\zeta$ ou $-k\dot{\theta}' d\theta$.

Les deux premières de ces expressions montrent qu'il s'agit de forces n'admettant pas de potentiel (cf. § 30); dans les deux dernières, qui peuvent s'écrire $-k\dot{\zeta}'^2 dt$ et $-k\dot{\theta}'^2 dt$, la dissipation d'énergie est manifeste.

d'adjoindre la résultante f des réactions de l'air ambiant sur les deux jets sortants et la réaction horizontale r au point O où la tige de centrage touche le flotteur. Le mouvement du centre de gravité du compas étant lent, r et f forment un couple. Or, si θ est nul, f est dans le plan de symétrie $\mathcal{NOZ}$ et son effet est simplement d'incliner un peu le compas autour de $\mathcal{ON}$ ($\lambda \neq 0$); si θ n'est pas nul, f quitte le plan $\mathcal{NOZ}$, et l'axe du couple r, f acquiert une composante suivant OZ qui, changeant de signe avec θ , est, en première approximation, de la forme $k\theta$ (on vérifie immédiatement que k est positif)⁽⁴⁷⁾.

Au lieu de ce dispositif, je suppose qu'on fixe au flotteur U, dans le vertical $\mathcal{XOZ}$ deux vases identiques⁽⁴⁸⁾, l'un au Nord, l'autre au Sud, réunis par un tube, et contenant un liquide dont le mouvement soit entravé de telle manière que son oscillation dans les vases soit décalée d'un quart de période par rapport à θ ; on réalisera ainsi un système amortisseur du second type⁽⁴⁹⁾.

34. Erreur de latitude⁽⁵⁰⁾. — Si le compas est convenablement surchargé de manière que l'axe $\mathcal{NS}$ soit horizontal dans la position d'équilibre à une latitude L_0 , il marque le Nord à cette latitude, car le couple f, r est dans le plan de l'équateur du gyro, ayant ainsi un moment nul par rapport à la verticale OZ .

Si l'on transporte le compas à une latitude L , supérieure par exemple à L_0 , les composantes verticales $\Phi_2 \Phi'_2$ augmentent et le centre g_1 des trois forces $P\Phi_2 \Phi'_2$ se déplace légèrement vers le pôle S du compas. Le pôle $\mathcal{N}$ se trouve, par suite, soulevé dans la position d'équilibre. Les trois couples $RP_1, \Phi_1 \Phi'_1, fr$ s'équilibrent, leurs projections horizontales s'équilibrent aussi; or, par suite de l'inclinaison du compas, la force f s'est légèrement déplacée vers le Nord, le couple $\Phi_1 \Phi'_1$ qui équilibre le couple fr projeté a donc le sens positif, c'est-à-dire que le compas est dévié vers l'Est. Les notations étant celles du paragraphe précédent, le théorème des moments appliqué à la verticale OZ et à l'horizontale OY donne la position d'équilibre à la latitude L :

$$I\Omega\varepsilon (\sin L - \sin L_0) = -aP\theta; I\Omega\varepsilon \cos L \zeta = k\theta.$$

Cette erreur de latitude ζ résulte du système amortisseur; elle n'existerait pas sans lui. On peut d'ailleurs la faire disparaître en modifiant la surcharge

⁽⁴⁷⁾ Dans le Sperry (single gyro), on reconnaîtra une application de ce même principe, quoique, au point de vue du paragraphe 30, les deux dispositifs soient nettement différents (voir § 43).

⁽⁴⁸⁾ La possibilité d'amortir les oscillations par un dispositif de ce genre a été indiquée par O. MARTIENSSEN, 3; c'est une application des citernes à roulis de H. FRAHM, 1.

⁽⁴⁹⁾ Le dispositif amortisseur du compas anglais Brown (note 8) s'inspire de ce principe; on retrouve un principe analogue dans l'Anschütz 1912 à trois gyros (ch. VI).

⁽⁵⁰⁾ Cette erreur est signalée par O. MARTIENSSEN, 3, par M. SCHULER, 1, G. K. B. ELPHINSTONE, 1.

suivant la latitude, de manière à assurer constamment l'horizontalité de l'axe NS⁽⁵¹⁾.

35. Étude élémentaire des déviations balistiques⁽⁵²⁾. —

Lorsqu'un bâtiment change de cap ou d'allure, passant des conditions de route (v_0, α_0) aux conditions (v_1, α_1) , le compas, qui présentait primitivement la déviation (§ 30)

$$(1) \quad \zeta_0 = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{V \cos L},$$

subit alors une *période transitoire* pendant l'évolution du bâtiment; il prend ensuite en oscillant sa nouvelle position définie par

$$(2) \quad \zeta_1 = \frac{v_1 \cos \alpha_1}{V \cos L}.$$

Les déviations dues à cette perturbation sont appelées *balistiques*.

Je vais en faire une étude élémentaire au moyen du théorème de Résal. Je raisonnerai sur le compas schématique défini au paragraphe 32.

Je rapporte le mouvement aux axes OX, OY, OZ issus du point fixe O du compas (OX, horizontale Nord; OY, horizontale Ouest; OZ, verticale). La modification à apporter aux lois de la mécanique terrestre est la suivante (§ 30) : le poids de chaque élément doit être remplacé par la résultante de l'attraction terrestre et de la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de ce trièdre par rapport au trièdre Txyz.

Dans cette modification du poids, seule la composante — mJ, ou J désigne l'accélération horizontale due à l'évolution du bâtiment, est à considérer; les autres sont inappréciables. En outre, dans le calcul de l'aimantation fictive, ε devra être légèrement modifié (§ 30). Cette modification n'est pas à retenir pendant la période transitoire, les forces — mJ étant beaucoup plus importantes, l'aimantation fictive n'a que très peu d'influence.

J_x, J_y désignant les composantes de l'accélération suivant OX et OY, ces forces — mJ équivalent à une force unique horizontale de composantes — $\frac{P}{g} J_x, -\frac{P}{g} J_y$, appliquée au centre de gravité g . Les autres forces données appliquées au compas sont l'aimantation fictive $\Phi \Phi'$ et le poids P appliqué en g .

Si J varie lentement, le compas s'incline *sans retard*, sous l'influence de la composante — $\frac{P}{g} J_y$, d'un angle λ défini par l'équation

$$(3) \quad \lambda = -\frac{J_y}{g},$$

⁽⁵¹⁾ Pour un Anschütz compensé à la latitude $L_0 = 50$ degrés, l'erreur à l'Équateur atteint 1° 6.

⁽⁵²⁾ Ces déviations sont étudiées par O. MARTIENSSEN, 3, et par M. SCHULER, 1, sans tenir compte de l'inclinaison Est-Ouest du compas.

comme le montre le théorème de Résal, lorsqu'on projette sur ON . Ce même théorème montre que la force $-\frac{P}{g} J_x$ fait précessionner l'axe NS normalement au plan ONS , donnant au point γ une vitesse dont les composantes suivant OY et OZ sont respectivement

$$(4) \quad I\Omega\zeta' = \frac{P}{g} a J_x \cos \lambda;$$

$$(5) \quad -I\Omega\theta' = \frac{P}{g} a J_x \sin \lambda.$$

A la fin de l'évolution, dont je suppose la durée t_1 assez petite pour que les forces Φ Φ' n'aient que peu d'influence, l'azimut du compas a varié de

$$(6) \quad \delta\zeta = \frac{1}{I\Omega} \frac{P}{g} a \int_0^{t_1} J_x \cos \lambda dt = \frac{aP\delta v_x}{gI\Omega}.$$

L'axe du gyro s'est en même temps incliné de

$$(7) \quad \delta\theta = -\frac{1}{I\Omega} \frac{P}{g} a \int_0^{t_1} J_x \sin \lambda dt = -\frac{aP}{g^2 I\Omega} \int_0^{t_1} J_x J_y dt.$$

Or, les nouvelles conditions de route (v_1 , α_1) du bâtiment correspondent à une position d'équilibre du compas faisant avec l'ancienne, dans le plan horizontal (§ 30), l'angle

$$(8) \quad \zeta_1 - \zeta_0 = \frac{v_1 \cos \alpha_1 - v_0 \cos \alpha_0}{V \cos L} = \frac{\delta v_x}{V \cos L}.$$

On voit donc que la position γ_2 occupée par γ à la fin de l'évolution diffère en général de la position γ_1 qui correspondrait à cette nouvelle position d'équilibre, de sorte que, l'accélération J ayant disparu, le compas oscille, le point γ décrivant une petite ellipse dont le centre est γ_1 , et dont le rapport des axes est $\sqrt{\frac{aP}{I\Omega \varepsilon \cos L}}$ (§ 32, éq. 9), soit, avec les données numériques de l'Anschütz, environ 36 (notes 43 et 44). Les indications du compas peuvent donc se trouver faussées longtemps après l'évolution.

On a pensé annuler ces déviations balistiques en choisissant les constantes de l'appareil de telle manière que γ_1 et γ_2 aient le même azimut⁽⁵³⁾, c'est-à-dire de telle manière que les expressions (6) et (8) soient égales; cette condition s'écrit

$$\frac{R}{g} = \frac{I\Omega}{aP\varepsilon \cos L}.$$

(53) Cette condition est indiquée par O. MARTIENSSSEN, 3.

Elle exprime que la période du compas doit être celle d'un pendule ayant pour longueur le rayon de la terre (voir § 32, éq. 10), c'est-à-dire environ quatre-vingt-cinq minutes.

Mais il faut remarquer que cette condition ne remplit pas le but, à cause de l'influence de l'inclinaison $\delta\theta$ (éq. 7). Cette influence n'existe d'ailleurs que si J_x et J_z sont tous deux différents de zéro, c'est-à-dire si l'accélération J est oblique par rapport au méridien; elle est maximum pour une inclinaison de 45 degrés. D'autre part, pour une variation donnée des conditions de route, il est manifeste que $\delta\theta$ est d'autant plus grand que la durée de l'évolution est plus courte, alors que $\delta\zeta$ conserve une même valeur.

Si $\delta\theta$ dépasse en valeur absolue $\frac{1}{36} \delta\zeta$, l'ellipse décrite par γ après l'évolution contient γ_0 à son intérieur et la déviation balistique est plus grande que si γ avait pu conserver sa position initiale. La condition exprimée ci-dessus, qui a toute sa valeur dans le cas d'une accélération Nord-Sud, n'a plus aucune valeur dans le cas actuel (voir note 52, p. 47). S'il s'agit d'une évolution simple telle qu'une giration à vitesse constante ou une augmentation ou diminution de vitesse à cap constant, γ_2 ne s'écarte guère de l'horizontale $\gamma_0\gamma_1$, et les déviations balistiques sont faibles, malgré ce qui vient d'être dit. Mais si le bâtiment, faisant route à 45 degrés du méridien, diminue, puis augmente sa vitesse un certain nombre de fois de suite, les effets de ces variations successives se compensent sur $\delta\zeta$ et s'ajoutent sur $\delta\theta$, de sorte que le point γ_2 peut être assez éloigné de l'horizontale $\gamma_0\gamma_1$, donnant lieu, dans la suite, à une forte déviation balistique.

Une giration de 180 degrés est sans effet; il en est de même d'une succession de demi-cercles, de même sens ou de sens différents; au contraire, une trajectoire en lacet, formé d'une série de quarts de cercle, et dont l'orientation générale serait à 45 degrés du méridien, donnerait une forte déviation balistique.

Il est intéressant de remarquer que l'influence de l'inclinaison $\delta\theta$ est inversement proportionnelle au cube de la période; $\delta\theta$ est, en effet, proportionnel à $\frac{aP}{\Omega}$;

or, la déviation en azimut qui en résulte (§ 32, éq. 9) est $\delta\theta \sqrt{\frac{aP}{\Omega \varepsilon \cos L}}$; cette déviation est donc, au total, proportionnelle à $\left(\frac{aP}{\Omega}\right)^{\frac{3}{2}}$, soit (§ 3, éq. 10) inversement proportionnelle à T^3 .

Ainsi, par exemple, dans l'Anschütz 1906, la période est, en moyenne, de soixante-trois minutes (§ 32, form. 11), soit les trois quarts de quatre-vingt-cinq minutes. Elle est trop faible pour annuler les déviations balistiques dues à une accélération Nord-Sud. Quant à l'influence de l'inclinaison $\delta\theta$, elle est $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2,4$ fois plus grande que si la période était de quatre-vingt-cinq minutes.

Le système amortisseur modifie ces résultats; il a, d'une part, une

influence directe sur l'orientation du compas à la fin de la période transitoire, dont il augmente ou diminue la déviation; il atténue, d'autre part, l'amplitude de l'oscillation consécutive (voir § 39).

36. Mise en équations plus précise. — J'utiliserai, par exemple, les équations de M. Appell⁽⁵⁴⁾. La position du flotteur U autour du point fixe O, où l'aiguille de centrage le touche, dépend des trois paramètres ζ , θ , λ (§ 26). En outre, la position du petit pendule auxiliaire U_2 servant à l'amortissement est déterminée par l'angle α dont il faut faire tourner le trièdre principal $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ de U autour de $O\hat{Y}$ pour obtenir en direction le trièdre principal de U_2 . Ce pendule U_2 se meut dans le plan $\hat{Z}O\hat{X}$, il est articulé à U en un point C dont les coordonnées par rapport à ce trièdre $O\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ sont l , 0 , $-h$. Son centre de gravité est à la distance b de C.

Soit P, le poids total; ϖ , le poids de U_2 ; la ligne IG qui joint le métacentre du flotteur au centre de gravité G du système formé par U, par le gyro U_1 et par la masse de U_2 supposée concentrée en C a pour projections d , e , $-a$ sur les axes $O\hat{X}$, $O\hat{Y}$, $O\hat{Z}$.

Je vais mettre le problème en équations, en supposant au bâtiment une accélération horizontale J (§ 35). Dans ces équations j'écrirai seulement les termes du premier ordre par rapport aux paramètres et à leurs dérivées; cependant, lorsque J sera différent de zéro, j'écrirai les termes du second ordre en J, λ , α , car λ et α n'étant pas gênés par l'inertie gyrostatique, pourront avoir des valeurs relativement importantes, de l'ordre de J. Je négligerai les produits de J, λ , α par ζ et θ . Le double 2S de l'énergie d'accélération du flotteur U, y compris la masse du gyro concentrée en son centre de gravité et la masse de U_2 concentrée en C est de la forme (note 27, p. 25)

$$(1) \quad A\lambda''^2 + B\theta''^2 + C\zeta''^2 + \dots,$$

en n'écrivant que ce qui est susceptible, à la dérivation, de donner des termes de l'ordre indiqué. Pour tenir compte de l'énergie d'accélération du gyro, il faut ajouter (§ 28)

$$(2) \quad B_1(\theta''^2 + \zeta''^2) + 2I\Omega(\theta''\zeta' - \theta'\zeta'') + \dots$$

Pour tenir compte de l'énergie du pendule auxiliaire U_2 , il faut ajouter (§ 27) le double de l'énergie d'accélération de U_2 , dans son mouvement autour de C,

$$(3) \quad A_2\lambda''^2 + B_2(\theta'' + \alpha'')^2 + C_2\zeta''^2 + \dots,$$

et l'expression $2M(\vec{J}_0, \vec{j}_c)$ (§ 27) qui se réduit ici à

$$(4) \quad 2\frac{\varpi b}{g}h(\theta''^2 + \lambda''^2 + \theta''\alpha'' - \lambda''\zeta''\alpha) + 2\frac{\varpi b}{g}l(\lambda''\zeta'' - \lambda''\theta''\lambda - \theta''\lambda'^2 - \theta''\alpha''\alpha) + \dots;$$

⁽⁵⁴⁾ M. APPELL, 1, t. II, p. 374; 3.

si λ_1 et θ_1 sont les angles, analogues à λ et à θ , qui fixent l'orientation de la surface libre du mercure, on peut représenter approximativement l'action du mercure sur le flotteur par une poussée égale au poids apparent de ce flotteur, et appliquée au métacentre I_1 , cette poussée étant corrigée, d'une part, par un couple s'opposant aux variations de $\lambda - \lambda_1$ et de $\lambda' - \lambda'_1$, et dont le travail virtuel est de la forme

$$(5) \quad M(\lambda''_1 - \lambda'') \delta\lambda + N(\lambda'_1 - \lambda') \delta\lambda,$$

et, d'autre part, par un couple s'opposant aux variations de $\theta - \theta_1$ et de $\theta' - \theta'_1$, ou, simplement, de $-\theta_1$ et de $-\theta'_1$ (θ et θ' étant très petits); le travail virtuel de ce second couple est de la forme

$$(6) \quad m\theta''_1 \delta\theta + n\theta'_1 \delta\theta.$$

Ces termes (5) et (6) n'interviennent guère que par roulis.

J'évalue le travail du couple formé par le poids apparent du flotteur et la poussée principale, en supposant le poids apparent du petit pendule U_2 concentré en C :

C'est la différentielle du produit scalaire du poids apparent, dont les projections sur OX, OY, OZ, sont respectivement $-\frac{P}{g} J_x$, $-\frac{P}{g} J_y$, $-P$, par le vecteur $\vec{IG}$, et, par suite, de l'expression

$$(7) \quad \frac{P}{g} J_x [c\zeta + a(\theta + \lambda\zeta)] - \frac{P}{g} J_y (d\zeta + a\lambda_j) + P \left[d\theta - c\lambda - a \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} \right) \right].$$

Je dois ajouter le travail du couple provenant du transport en C du poids apparent du petit pendule; c'est la différentielle de l'expression

$$(8) \quad \frac{\omega b}{g} J_x (\alpha + \theta + \lambda\zeta) + \frac{\omega b}{g} J_y (\alpha\zeta - \lambda) - \frac{\omega b}{2} [(\alpha + \theta)^2 + \lambda^2].$$

Le travail de l'aimantation fictive est de même la différentielle du produit scalaire du vecteur ε par le vecteur $I\Omega$ parallèle à l'axe du gyro, et, par suite, de l'expression

$$(9) \quad -I\Omega\varepsilon \cos L \left(\frac{\theta^2}{2} + \frac{\zeta^2}{2} \right) - I\Omega\varepsilon \sin L \theta.$$

La réaction de l'air sur les jets sortants peut se représenter par une force constante f agissant parallèlement à Oy dans le sens négatif, appliquée en un point de coordonnées $k\alpha$, 0, $-c$, dans le système Oxyz. Son travail virtuel est, en se bornant aux termes du premier ordre, f étant relativement petit,

$$(10) \quad -fc \delta\lambda + f(c\theta - k\alpha) \delta\zeta;$$

enfin, l'oscillation du petit pendule U_2 autour de C (variation de α) pouvant être relativement rapide (cas du roulis), il y a lieu de prévoir un travail virtuel de résistances passives de la forme

$$(11) \quad -p\alpha'\delta\alpha.$$

Cela posé, je puis écrire les équations de M. Appell; j'écris les équations correspondant à $\lambda, \alpha, \zeta, \theta$, dans l'ordre que j'indique,

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A}\lambda'' + \frac{\mathfrak{w}b}{g}l\zeta'' &= -(aP + \mathfrak{w}b)\left(\frac{J_x}{g} + \lambda\right) - Pe - fc + M(\lambda''_1 - \lambda'') \\ &+ N(\lambda'_1 - \lambda'); \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad B_2(\theta'' + \alpha'') + \frac{\mathfrak{w}b}{g}h\theta' + p\alpha' = \mathfrak{w}b\left(\frac{J_x}{g} - \alpha - \theta\right);$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{C}\zeta'' - I\Omega\theta' + \frac{\mathfrak{w}b}{g}\lambda''(l - h\alpha) &= -\tau\zeta + f(c\theta - k\alpha) + \frac{P}{g}(eJ_x - dJ_y) \\ &+ \frac{J_x}{g}\lambda(aP + \mathfrak{w}b) + \frac{J_y}{g}\alpha\mathfrak{w}b; \end{aligned} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B}\theta'' + \left(B_2 + \frac{\mathfrak{w}b}{g}h\right)(\theta'' + \alpha'') + I\Omega\zeta' - \frac{\mathfrak{w}b}{g}l(\lambda'^2 + \lambda\lambda'' + \alpha\alpha'') \\ = \alpha P\left(\frac{J_x}{g} - \theta\right) + \mathfrak{w}b\left(\frac{J_x}{g} - \alpha - \theta\right) - \tau\theta + Pd - \sigma + m\theta''_1 + n\theta'_1; \end{aligned} \right.$$

j'ai posé

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{A} &= A + A_2 + 2\frac{\mathfrak{w}b}{g}h; \mathfrak{B} = B + B_1 + \frac{\mathfrak{w}b}{g}h; \mathfrak{C} = C + B_1 + C_2; \\ \tau &= I\Omega\varepsilon \cos L; \sigma = I\Omega\varepsilon \sin L. \end{aligned} \right.$$

37. Position d'équilibre. — Elle s'obtient en annulant toutes les dérivées et l'accélération J : on peut déterminer d et e , c'est-à-dire surcharger le compas de manière que λ et θ soient nuls, on a alors les conditions

$$(17) \quad Pe = -fc; Pd = \sigma;$$

les équations montrent que α et ζ sont nuls : il n'y a pas de déviation. Si cette compensation a été faite à la latitude L_0 , on trouve, à la latitude L , la déviation ζ définie par

$$(18) \quad aP \cos L \zeta = f(c + k)(\sin L_0 - \sin L),$$

en négligeant $I\Omega\varepsilon$ devant aP .

38. Oscillation du compas. — J'étudie les petites oscillations du compas supposé dérangé de sa position d'équilibre, puis abandonné à lui-même sans nouvelle perturbation, en particulier $J = 0$.

L'équation (12) qui, en dehors de λ et de λ_1 , ne contient qu'un terme en ζ'' , très petit, d'une part, parce que ϖ est petit, et, d'autre part, parce que ζ'' est très petit, montre que le compas oscille autour de $O\lambda$ (variation de λ) comme s'il n'y avait pas de gyro.

Cette oscillation, de période relativement courte, s'amortit rapidement si les conditions initiales l'ont fait naître, de sorte qu'on peut supposer que λ et λ_1 sont nuls. L'équation (13), dans laquelle θ et θ' sont nécessairement très petits, montre que α reste sensiblement égal à $-\theta$, dès que les oscillations initiales, s'il en existe, se sont amorties. Restent les équations (14) et (15) dans lesquelles θ_1 sera pris égal à zéro. Elles s'écrivent

$$(19) \quad \ominus \zeta'' - \mathbf{I} \Omega \theta' = -\tau \zeta + k \theta,$$

$$(20) \quad \mathcal{V} \theta'' + \mathbf{I} \Omega \zeta' = -(\alpha P + \tau) \theta,$$

en posant

$$(21) \quad f(c + k) = k.$$

L'équation caractéristique de ce système d'équations différentielles est

$$(22) \quad (\ominus r^2 + \tau)(\mathcal{V} r^2 + \alpha P) + \mathbf{I} \Omega r (\mathbf{I} \Omega r + k) = 0,$$

si l'on néglige τ devant αP .

Cette équation, pour $\mathbf{I} \Omega$ très grand, a deux racines r_1, r_2 voisines de zéro, et deux racines très grandes r_3, r_4 .

Pour obtenir les racines voisines de zéro, je néglige le terme en r^4 et j'obtiens l'équation

$$r^2 (\mathbf{I}^2 \Omega^2 + \ominus \alpha P + \mathcal{V} \tau) + k \mathbf{I} \Omega r + \tau \alpha P = 0.$$

Or, dans l'Anschütz 1906, $\ominus \alpha P + \mathcal{V} \tau$ est de l'ordre de $10^{-6} \mathbf{I}^2 \Omega^2$ ⁽⁵⁵⁾; je puis donc le négliger devant $\mathbf{I}^2 \Omega^2$, en remarquant incidemment combien l'influence de $\mathcal{V}$ et de $\ominus$, c'est-à-dire de l'inertie de l'armature, est faible dans le calcul de ces racines r_1 et r_2 ; j'obtiens ainsi

$$r_1, r_2 = \frac{1}{\mathbf{I} \Omega} \left(-\frac{k}{2} \pm i \sqrt{\tau \alpha P - \frac{k^2}{4}} \right).$$

Les racines infinies r_3, r_4 se déduisent de celles-ci en remarquant que la somme des quatre racines est nulle et que le produit est $\frac{\tau \alpha P}{\mathcal{V} \ominus}$, j'obtiens ainsi $r_3 + r_4$ et $r_3 r_4$, d'où, sensiblement,

$$r_3, r_4 = \frac{k}{2 \mathbf{I} \Omega} \pm i \frac{\mathbf{I} \Omega}{\sqrt{\mathcal{V} \ominus}}.$$

⁽⁵⁵⁾ D'après O. MARTIENSSSEN, 3.

La solution du problème est alors de la forme

$$\zeta = Z_1 e^{r_1 t} + Z_2 e^{r_2 t} + Z_3 e^{r_3 t} + Z_4 e^{r_4 t},$$

$$\theta = \Theta_1 e^{r_1 t} + \Theta_2 e^{r_2 t} + \Theta_3 e^{r_3 t} + \Theta_4 e^{r_4 t},$$

où les Z et les Θ désignent des constantes.

Les termes en $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$ correspondent à une oscillation amortie, dont la période

$$T = 2\pi \frac{1\Omega}{\sqrt{\tau a P - \frac{k^2}{4}}}$$

est un peu supérieure à la période trouvée dans la théorie élémentaire par suite du facteur d'amortissement $\frac{k}{2\Omega}$ ⁽⁵⁶⁾.

Les termes en $e^{r_3 t}$ et $e^{r_4 t}$ correspondent à une période très courte $\frac{2\pi\Omega}{\sqrt{15\epsilon}}$ (note 12, p. 6). Ce mouvement a le caractère d'une nutation qui vient se superposer au mouvement général de précession défini par les termes en $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$ qui dominent le mouvement ⁽⁵⁷⁾.

Il est intéressant de remarquer que les racines r_3 et r_4 définissent une oscillation divergente, leur partie réelle étant positive. Il est d'ailleurs juste d'observer que cette divergence est extrêmement lente, et que, d'autre part, les moindres résistances passives (négligées ci-dessus) s'opposant à la variation de θ ou de ζ introduisent dans l'équation caractéristique un terme en r^3 à coefficient positif suffisant pour assurer à $r_3 + r_4$ une valeur négative.

Enfin ⁽⁵⁸⁾, les résistances passives absorbent même rapidement cette nutation, qui, d'ailleurs, si elle était sensible, aurait tôt fait de détériorer le compas.

La nutation étant supposée absorbée, ζ et θ sont définis par des expressions de la forme

$$\zeta = Ze^{-pt} \cos qt; \theta = \frac{1\Omega}{aP} Ze^{-pt} (p \cos qt + q \sin qt),$$

⁽⁵⁶⁾ M. SCHULER, 1, indique 3700' comme valeur approchée de la période sans amortissement, 4110' en tenant compte de l'amortissement.

⁽⁵⁷⁾ On se trouve dans le cas désigné par L. KELVIN et P.-G. TAIT (1, p. 396 à 413) sous le nom de *gyrostatic domination*.

La période de cette nutation ne dépend pas des forces agissant sur le compas. Ce fait est général dans les systèmes dominés gyrostatiquement. Ces mouvements de nutation sont pour cette raison appelés *adynamic* (assez improprement d'ailleurs) par L. KELVIN et P.-G. TAIT (1, p. 412).

⁽⁵⁸⁾ Voir O. MARTIENSSSEN, 3; H. LAMB, 1.

en posant $r_1, r_2 = -p \pm qi$. Le point de coordonnées cartésiennes ζ, θ décrit le diagramme lieu du point A (§ 32). On vérifie facilement que c'est une perspective oblique de la spirale logarithmique

$$x = Z \sqrt{\frac{\tau}{aP}} e^{-pt} \cos qt; \quad y = Z \sqrt{\frac{\tau}{aP}} e^{-pt} \sin qt,$$

sur un plan passant par Oy.

39. Déviations balistiques. — Je suppose que le bâtiment acquière à l'instant $t=0$ une accélération J qu'il conserve, variable ou non, jusqu'à l'instant t_1 ; à cet instant t_1 , son accélération J disparaît, et $\lambda, \alpha, \theta_1, \lambda_1$ reprennent la valeur zéro en oscillant dans l'intervalle t_1, t_2 . Cet intervalle $0, t_2$ est supposé court par rapport à la durée de l'oscillation du compas. À l'instant t_2 , ζ et θ se trouvent donc avoir des valeurs $\delta\zeta, \delta\theta$ différentes de zéro, et c'est à partir de cette position que le compas oscille ensuite conformément aux indications du paragraphe 38.

Je multiplie les équations (12) (13) (14) (15) par dt et je les intègre dans l'intervalle $(0, t_2)$ en remarquant, d'une part, que $\lambda, \alpha, \lambda_1, \theta_1$, ainsi que leurs dérivées premières, sont nuls au début et à la fin de l'intervalle; et, d'autre part, que les termes non gyrostatiques qui contiennent en facteur l'une des intégrales $\int_0^{t_2} \zeta dt, \int_0^{t_2} \zeta' dt = \delta\zeta, \int_0^{t_2} \zeta'' dt = \delta\zeta'$, ou des intégrales analogues en θ , sont petits, si la durée de la perturbation est petite par rapport à la période du compas; je les négligerai, comme première approximation; j'obtiens ainsi, en désignant par δv_x et δv_y la variation des composantes de la vitesse v du bâtiment suivant OX et OY, et utilisant les formules (16), (17) et (21) des paragraphes 36, 37, 38,

$$(1) \quad \int_0^{t_2} \lambda dt = -\frac{\delta v_x}{g}; \quad \int_0^{t_2} \alpha dt = \frac{\delta v_y}{g}; \quad (2)$$

$$(3) \quad -\Omega \delta\theta - \frac{\omega b}{g} h \int_0^{t_2} \alpha d\lambda' = k \frac{\delta v_x}{g} - \sigma \frac{\delta v_y}{g} + \omega b \int_0^{t_2} \alpha \frac{J_z}{g} dt + (aP + \omega b) \int_0^{t_2} \lambda \frac{J_z}{g} dt,$$

$$(4) \quad \Omega \delta\zeta - \frac{\omega b}{g} l \int_0^{t_2} \alpha d\alpha' = aP \frac{\delta v_x}{g}.$$

Les termes en ω des premiers membres sont petits; d'ailleurs on peut les rendre aussi petits que possible en allégeant U_2 et en diminuant l et h . Je les négligerai⁽⁵⁹⁾. L'équation (4) donne pour $\delta\zeta$ la valeur obtenue par l'étude élémentaire (§ 35). L'équation (3) donne la valeur de $\delta\theta$. Cette valeur

⁽⁵⁹⁾ Dans les compas Sperry, on retrouvera des termes analogues, mais avec un coefficient beaucoup plus important (voir chap. IV et V).

est la somme de trois termes : le premier $k \frac{dv_x}{g}$ représente l'influence sur $\delta\theta$ du système amortisseur. Ce terme est proportionnel à la variation de la composante v_x ; *il ne dépend pas du temps mis par le bâtiment à réaliser cette variation*. Il est maximum pour une variation de vitesse suivant le méridien; son ordre de grandeur est, pour une variation de vitesse de 30 nœuds (15^{ms}), de 15×10^{-4} , soit $0^{\circ}25$; dans ce cas particulier, les autres termes qui composent $\delta\theta$ sont nuls, et cette valeur $\delta\theta$ entraîne une oscillation consécutive amortie dont la première amplitude est d'environ 5° . Le second terme est proportionnel à la variation de vitesse Est-Ouest, il s'annule à l'Équateur si le compas y est convenablement réglé. Mais sa valeur, aux latitudes moyennes, est, toutes choses égales, environ vingt fois moindre que celle du premier terme.

J'étudierai de plus près, à propos du Sperry, les intégrales qui rentrent dans les deux derniers termes. Si je suppose, comme approximation, que J varie assez lentement par rapport à la période propre des variations de λ et de α , telle qu'elle est définie par les équations (12) et (13) (§ 36), on peut admettre que λ , α , λ_1 , θ_1 prennent sans retard appréciable, à chaque instant, les valeurs qui correspondraient à l'équilibre, si J conservait la même valeur, soit

$$(5) \quad \lambda = \lambda_1 = -\frac{J_r}{g}; \quad \alpha = \theta_1 = \frac{J_x}{g},$$

θ étant considéré comme petit. Dans ces conditions, les deux derniers termes de $\delta\theta$ se réduisent à

$$(6) \quad \frac{aP}{I\Omega} \int_0^{t_2} \frac{J_x J_r}{g^2} dt.$$

Cette valeur dépend non seulement de la variation de la vitesse en grandeur et en direction, mais de la loi suivant laquelle cette variation est réalisée; en particulier, elle est, toutes choses égales, inversement proportionnelle à la durée de l'évolution. S'il s'agit d'une variation de vitesse à cap constant Δ , cette valeur s'écrit

$$(7) \quad \frac{aP}{I\Omega} \sin \Delta \cos \Delta \int_0^{t_2} \left(\frac{J}{g}\right)^2 dt;$$

elle est maximum pour un cap à 45° du méridien. S'il s'agit d'une augmentation ou diminution de vitesse de 30 nœuds, se produisant dans le court délai d'une minute, le terme dû à l'amortissement a la valeur $0^{\circ}25 \times \sin 45^{\circ} = 0^{\circ}18$; le dernier terme prend une valeur à peine inférieure $0^{\circ}16$. Ces deux effets s'ajoutent, si l'accélération est dirigée ver l'Est ($J_r < 0$); ils se retranchent, si l'accélération est dirigée vers l'Ouest. On obtient finalement une déviation balistique consécutive de 7 degrés, dans le premier cas et d'une fraction de degré dans le second cas.

La forme du terme (6) met en évidence la superposition de ses effets et l'exagération consécutive des déviations balistiques, lorsque le produit $J_x J_y$ conserve un signe constant malgré les changements de signe de chaque facteur, comme il arrive dans le cas des lacets imaginés au paragraphe 35 ou de variations alternatives de vitesse à cap constant. Le terme dû à l'amortissement a un caractère tout différent, puisqu'il ne dépend que de la différence entre la vitesse initiale et la vitesse finale.

$\lambda, \lambda_1, \alpha, \theta_1$ étant donnés par les équations (5), on trouvera dans les traités d'analyse l'expression générale de la solution en ζ et θ des équations (14) et (15) (§ 36); cette expression permet d'étudier les déviations balistiques au cours d'une longue évolution. Si J_x et J_y contiennent des termes sinusoïdaux, comme il arrive dans une giration, on aura une certaine exagération des valeurs prises par ζ et θ , s'il y a synchronisme entre la période du compas et celle des termes sinusoïdaux introduits dans les équations.

40. Étude du roulis ⁽⁶⁰⁾. — Le roulis d'un bâtiment peut être assimilé à une rotation oscillatoire autour de son axe longitudinal. La période de ce roulis (de l'ordre 5 à 12^s) est nettement supérieure à la période propre de chacun des paramètres λ et α , de sorte que l'amplitude Γ_0 du roulis est du même ordre de grandeur que les valeurs prises par λ et α ; je conserverai donc les termes du second ordre en $\Gamma_0, \lambda, \alpha$, négligeant les produits de Γ_0 par θ et par ζ .

Soit Δ l'azimut du plan vertical dans lequel se fait le mouvement de roulis, le cap du bâtiment étant $\Delta + \frac{\pi}{2}$. L'inclinaison du bâtiment étant supposée donnée par

$$(1) \quad \Gamma = \Gamma_0 \cos st,$$

l'accélération d'un point situé à la distance R au-dessus de l'axe d'oscillation a, au degré d'approximation convenu, en posant $J_0 = R\Gamma_0 s^2$, les composantes

$$(2) \quad J_x = -J_0 \cos st \cos \Delta; J_y = -J_0 \cos st \sin \Delta; J_z = J_0 \Gamma_0 \cos 2st.$$

L'accélération J_z n'est pas à retenir, car elle est du second ordre, et, comme elle ne s'introduirait dans les équations que multipliée par λ, θ , ou α , on obtiendrait des termes que j'ai convenu de négliger. J'aurai donc les équations du mouvement du compas, en remplaçant J_x et J_y par les valeurs (2), dans les équations (12), (13), (14), (15) du paragraphe 36.

Les paramètres ζ et θ variant très lentement, leurs dérivées sont négligeables dans les équations (12) et (13). Comme dans tous les problèmes de petits mouvements troublés par des forces périodiques, λ et α présentent une oscillation libre superposée à une oscillation forcée. Si le roulis est parfaitement régulier, l'oscillation libre ne tarde pas à disparaître : l'oscillation forcée seule subsiste. Celle-ci s'obtient par simple identification.

⁽⁶⁰⁾ O. MARTIENSSEN, 3, indique la déviation permanente causée par le roulis.

L'équation (13) donne pour α une oscillation forcée présentant avec le roulis une petite différence de phase φ ; si T_Γ désigne la période du roulis, T_α la période du petit pendule, on a pour cette oscillation forcée de α l'expression approchée

$$(3) \quad \alpha = \mathcal{A} \cos \Delta \cos (st + \varphi), \text{ avec } \mathcal{A} = -\frac{J_0}{g} \frac{T_\Gamma^2}{T_\Gamma^2 - T_\alpha^2};$$

$\mathcal{A}$ est donc très voisin de $-\frac{J_0}{g}$.

L'étude de λ est plus complexe, étant liée à l'oscillation du mercure et de la cuve, on peut supposer cependant une expression approchée de même forme

$$(4) \quad \lambda = \mathcal{L} \sin \Delta \cos (st + \psi),$$

$\mathcal{L}$ étant voisin de $\frac{J_0}{g}$, θ aurait une expression sinusoïdale analogue.

Je remplace α , λ , θ_1 par ces expressions dans les équations en ζ et θ ; j'obtiens deux équations linéaires du second ordre à coefficients constants; si, dans les seconds membres fonctions de t , je remplace les produits de sinus et de cosinus par des sommes, chacun d'eux devient la somme de trois termes, l'un constant, l'autre sinusoïdal de période $\frac{2\pi}{s}$, l'autre de période $\frac{\pi}{s}$. L'expression donnant l'oscillation forcée de ζ ou de θ est donc la somme de trois termes de même forme, l'un constant, les autres sinusoïdaux; ces deux derniers ne sont pas intéressants, leur amplitude étant nécessairement très petite; je vais calculer les termes constant ζ_0 et θ_0 . En identifiant, j'obtiens

$$(5) \quad \tau \zeta_0 - h \theta_0 = -\frac{\sin \Delta \cos \Delta}{2} \left[\frac{J_0}{g} \mathcal{L} (aP + \varpi b) \cos \psi + \frac{J_0}{g} \mathcal{A} \varpi b \cos \varphi \right. \\ \left. + \mathcal{A} \mathcal{L} s^2 \frac{\varpi b}{g} h \cos (\varphi - \psi) \right]$$

$$(6) \quad aP \theta_0 = -\frac{\cos^2 \Delta}{2} \mathcal{A}^2 s^2 \frac{\varpi b}{g} l.$$

Les deux premiers termes en ϖb de l'équation (5) ont une somme presque nulle d'après les valeurs approchés de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{L}$. Les autres termes en ϖb des équations (5) et (6) sont négligeables à côté du terme en aP .

Si le roulis est parfaitement régulier, on voit que le compas présente une déviation permanente ζ_0 , θ_0 , définie par les équations (5) et (6). θ_0 est

d'ailleurs sensiblement nul, et ζ_0 se réduit sensiblement au terme en aP , soit, à peu près,

$$(7) \quad \tau\zeta_0 = - \frac{\sin \Delta \cos \Delta}{g} \left(\frac{J_0}{g} \right)^2 aP.$$

Cette déviation en azimut est maximum pour un roulis N W – S E. Dans ces conditions, si la période du roulis est 10^s , si l'amplitude des oscillations horizontales du bâtiment à l'endroit où est placé le compas est $0^m 70$, la formule (7) donne une déviation voisine de 12^o .

Pratiquement, le roulis n'a pas cette régularité; dès que l'amplitude, la phase et la période du roulis se modifient sensiblement, l'oscillation libre réapparaît, et le compas oscille autour de la nouvelle position déviée qui correspond aux nouvelles constantes du roulis.

41. Influence d'une variation de vitesse du gyro. — Si le voltage du courant qui entretient la rotation du gyro vient à baisser, le couple moteur ne fait plus équilibre aux résistances passives, et la vitesse u de rotation propre du gyro diminue, faisant ainsi apparaître un couple — Iu' de forces d'inertie qu'il y a lieu de joindre aux forces extérieures dans les considérations qui précèdent. Si l'axe du gyro est horizontal, la position d'équilibre se déduit de l'ancienne par une simple inclinaison λ autour de $O-N$, jusqu'à ce que ce couple de forces d'inertie soit équilibré par le couple que forment le poids et la poussée du mercure. Mais, si l'axe est oblique, cette inclinaison ne peut équilibrer que la composante horizontale de l'axe de ce couple, et c'est l'aimantation fictive Φ_1, Φ'_1 qui, seule, pourra équilibrer la composante verticale, entraînant, par suite, une déviation ζ définie par

$$\tau\zeta = - Iu'\theta.$$

Elle est dirigée vers l'Ouest si la vitesse diminue avec $\theta > 0$. La nécessité de maintenir l'axe rigoureusement horizontal pour éviter ces inconvénients est manifeste.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU COMPAS SPERRY À UN GYROSTAT (1911).

42. Principe. — Étude élémentaire. — Le compas américain Sperry, avec son pendule auxiliaire stabilisé par un petit gyro (§ 29), constitue un progrès important sur l'Anschütz 1906. La supériorité de son principe provient surtout de la manière dont il réagit aux accélérations.

tions perturbatrices. En outre, son dispositif amortisseur est une application intéressante de l'asservissement.

Un gyro U_3 est mobile autour de son axe de figure $\mathcal{N}\mathcal{S}$ dans une boîte U_2 , mobile elle-même autour d'un axe M_2N_2 par rapport à un cercle vertical U_1 (fig. 5); ce cercle est mobile autour d'un diamètre M_1N_1 par rapport à une charpente U , appelée *croisillon* ou *araignée* (*spider*), mobile autour de l'axe MN par rapport à un cercle de cardan U_o , mobile lui-

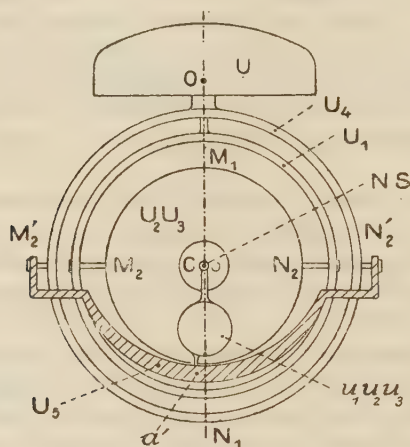


Fig. 5.

même autour de l'un de ses diamètres M_oN_o . Les axes M_oN_o , MN , M_1N_1 concourent en un point O fixe par rapport au navire; $\mathcal{N}\mathcal{S}$, M_2N_2 , M_1N_1 concourent en C . Dans la position d'équilibre du compas, $\mathcal{N}\mathcal{S}$ est parallèle à OX (horizontale Nord), M_2N_2 à OY (horizontale Ouest), $\mathcal{N}\mathcal{S}$ est parallèle à OZ (verticale); M_oN_o et MN sont horizontaux, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe longitudinal du navire.

La boîte U_2 porte, en un point o situé sur le prolongement de $\mathcal{N}\mathcal{S}$, un pendule à longue période $u_1u_2u_3$ (*gyro-balistique*, *floating ballistic*, § 29) stabilisé par un petit gyro, et relié à U_2 en o par deux charnières horizontales à angle droit (fig. 2). Le point C est centre de gravité du système formé par U_2 , U_3 et la masse du pendule supposée concentrée en o ⁽⁶¹⁾. Ce pendule porte à sa partie inférieure deux galets: l'un a coulisse dans une gouttière circulaire fixée à la boîte U_2 ; l'autre a' , dans une gouttière analogue portée par un *contre-poids* (*bail*) U_5 en forme de crois-sant, mobile autour d'un axe M_2N_2 disposé sensiblement dans le prolongement de l'axe M_2N_2 . Ce contre-poids exerce sur le galet a' une action F , dans un sens ou dans l'autre, suivant son inclinaison, action qui se transmet à la boîte U_2 , par l'intermédiaire du galet a .

⁽⁶¹⁾ Le système U_2U_3 est légèrement surchargé sur une perpendiculaire à $\mathcal{N}\mathcal{S}$ et à M_2N_2 ; il sera tenu compte plus loin de cette surcharge. Je la néglige ici.

Lorsque le cercle U_1 tourne autour de la verticale, l'axe M_2N_2 tourne en même temps de manière à rester toujours dans le plan de U_1 ; à cet effet, il est monté sur un cercle vertical U_4 appelé *cercle asservi* (*phantom*), qui, au moyen d'un petit *moteur d'asservissement* porté par le croisillon U , suit automatiquement le cercle vertical U_1 dans toutes ses orientations, *sans réagir en aucune façon sur lui*. C'est ce cercle asservi qui porte la rose. Le système $U_1U_2U_3u_1u_2u_3$ s'appelle *élément sensible*.

La position d'équilibre apparent s'obtient en appliquant la loi fondamentale de la mécanique terrestre au système $U_1U_2U_3u_1u_2u_3$: les forces extérieures formant un système de vecteurs équivalent à zéro sont les poids, la force F , action du contrepoids sur le galet a' , l'aimantation fictive Φ, Φ' , et les réactions le long de l'axe M_1N_1 , que j'élimine en prenant les moments de ces forces par rapport à M_1N_1 .

Les poids et la force F ont un moment nul, il en est donc de même de l'aimantation fictive Φ, Φ' , c'est-à-dire que l'axe NS est dans le méridien.

En déplaçant légèrement l'axe M_2N_2 par rapport au cercle asservi U_4 — ce qui se fait au moyen du *cadran Est de latitude* — on fait varier la force F suivant la valeur de la latitude, *de manière à assurer l'horizontalité parfaite de NS , dans la position d'équilibre*. L'équation des moments, par rapport à l'axe M_2N_2 , appliquée à l'équilibre du système $U_2U_3u_1u_2u_3$, montre que le moment de la force F est égal au moment de l'aimantation fictive :

$$(1) \quad Fa = -I\Omega\varepsilon \sin L, \quad (a = Ca')$$

d'où la valeur de F qui dépend, en effet, de L .

Je vais étudier les oscillations de ce compas, lorsqu'on le déränge de sa position d'équilibre : Soient ζ et θ les angles (azimut et inclinaison de NS) fixant la position de la boîte U_2 , la charpente U étant supposée rester fixe dans sa position normale (M_1N_1 vertical). Je supposerai, en outre, étant donnée la lenteur de l'oscillation du compas, que le gyrobalistique reste sensiblement vertical et ne réagisse que statiquement sur la boîte U_2 .

J'applique le théorème de Résal au système $U_1U_2U_3u_1u_2u_3$ dans l'hypothèse d'une inertie gyrostatique prépondérante (§ 24 et note 57, p. 54) par rapport au point fixe C , et je projette sur la verticale M_1N_1 pour éliminer les réactions le long de cet axe; le moment de F étant nul, j'obtiens (cf. § 32) l'équation

$$(2) \quad -I\Omega (\sin \theta)' = -I\Omega\varepsilon \cos L \cos \theta \sin \zeta.$$

Ce même théorème appliqué au système $U_2U_3U_5u_1u_2u_3$ par rapport au point C , en projetant sur M_2N_2 de manière à éliminer les réactions le long de cet axe et de M_2N_2 , donne l'équation (voir notations, § 29, p. 37)

$$(3) \quad I\Omega \cos \theta \zeta' = -Ql \sin (\theta + \eta) - \varpi b \sin \theta - I\Omega\varepsilon (\cos L \cos \zeta \sin \theta + \sin L \cos \theta),$$

[Q , poids du contrepoids; l , distance de son centre de gravité g' à $M'_2N'_2$; $\theta + \eta$, inclinaison du plan défini par $M'_2N'_2g'$; η est une constante dont la valeur est petite; elle se règle au moyen du cadran Est de latitude (voir éq. 4)]. Cette équation se simplifie si l'on remplace $\sin(\theta + \eta)$ par $\sin \theta + \eta \cos \theta$, et si l'on tient compte de ce que θ est nul dans la position d'équilibre ($\zeta' = \theta' = 0$), ce qui donne la condition

$$(4) \quad Ql\eta + I\Omega \varepsilon \sin L = 0.$$

L'équation devient alors

$$(5) \quad I\Omega \cos \theta \zeta' = -(Ql + \varpi b + I\Omega \varepsilon \cos L \cos \zeta) \sin \theta.$$

Il est facile de montrer l'équivalence des équations (2) et (5) aux équations (1) et (2) du paragraphe 32, à condition de remplacer aP par $Ql + \varpi b$. Les propriétés qui ont été déduites de ces équations subsistent donc ici intégralement. Mêmes propriétés du cône décrit par $C\mathcal{N}$, qui, ici, se confond avec $\mathcal{US}$.

Toutes les formules du paragraphe 32 s'appliquent aussi, moyennant ce remplacement de aP par $Ql + \varpi b$. En particulier, la période des petites oscillations est

$$(6) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I\Omega}{(Ql + \varpi b) \varepsilon \cos L}}.$$

Les valeurs numériques de ces quantités sont, dans le système kilog.-force, mètre, seconde⁽⁶²⁾⁽⁶³⁾,

$$(7) \quad \begin{cases} I = 0,032; & \Omega = 900 \text{ (8 600 tours/min.)}; & I\Omega = 28,8; \\ I\Omega \varepsilon = 0,002^{(63)}; & Ql + \varpi b = 0,8; & T = 85^{\text{min.}} \text{ pour } L = 35^\circ. \end{cases}$$

43. Amortissement. — Erreur de latitude. — J'ai supposé que le galet a' , par lequel le contrepoids agit sur l'élément sensible, est situé dans le plan perpendiculaire en C à M_2N_2 ; pratiquement, il est légèrement décalé vers l'Est d'une quantité $a\rho$ valant 6^{mm} environ. Ce décalage suffit pour amortir les oscillations.

Si, en effet, les équations (4) et (5) subsistent sans modification, puisqu'elles sont indépendantes des actions intérieures au système $U_2U_3U_5u_1u_2u_3$, donc de la position du point de contact u_1U_5 , l'équation (2) doit, au contraire, être modifiée par l'introduction, au second membre du moment de l'action F du contrepoids. Cette action F est d'ailleurs donnée par l'application de la loi fondamentale de la mé-

⁽⁶²⁾ D'après *Le Compas gyroscopique* . . . , 9, et A. BAULE, 1.

⁽⁶³⁾ Cette valeur de l'aimantation fictive correspond à 200 000 unités C. G. S., soit dix fois celle de l'Anschütz; il est bon d'ajouter que la masse à entraîner (ici 45 kilog.) est plus grande que celle de l'Anschütz (9 kilog. 5).

canique au contrepois dont on néglige les forces d'inertie; j'obtiens ainsi

$$(8) \quad Fa - Ql \sin (\theta + \eta) = 0;$$

$$(9) \quad -I\Omega (\sin \theta)' = -I\Omega \varepsilon \cos L \cos \theta \sin \zeta + Fa\rho \cos \theta.$$

Dans le cas de petites oscillations, ces équations s'écrivent

$$(4') \quad Ql\eta = -I\Omega \varepsilon \sin L;$$

$$(5') \quad I\Omega \zeta' = -(Ql + \varpi b + I\Omega \varepsilon \cos L) \theta;$$

$$(9') \quad I\Omega \theta' = I\Omega \varepsilon \cos L \zeta - Ql\rho (\theta + \eta).$$

Elles mettent d'abord en évidence l'erreur de latitude présentée par la position d'équilibre: l'hypothèse $\theta' = \zeta' = 0$ entraîne, en effet,

$$(10) \quad \theta = 0; \quad \zeta = \frac{Ql\eta}{I\Omega \varepsilon \cos L} = -\rho \operatorname{tg} L.$$

Cette déviation est vers l'Est dans l'hémisphère Nord; elle est due uniquement au système amortisseur⁽⁶⁴⁾.

L'élimination de θ entre les équations (5') et (9') met en évidence l'amortissement des oscillations. Si l'on compte ζ à partir de la valeur (10) qui correspond à l'équilibre, l'équation donnant sa variation s'écrit, en effet,

$$(11) \quad I\Omega \zeta'' + Ql\rho \zeta' + \varepsilon \cos L (Ql + \varpi b + I\Omega \varepsilon \cos L) \zeta = 0.$$

C'est l'équation d'une oscillation amortie; le facteur d'amortissement est de l'ordre de 4×10^{-1} , donnant un décrement un peu supérieur à 2, de sorte que l'amplitude de chaque demi-oscillation est environ le tiers de la précédente⁽⁶⁵⁾.

⁽⁶⁴⁾ La cause de cette erreur de latitude est très simple: la nécessité, pour assurer l'horizontalité du compas aux latitudes différentes de zéro, d'une force F , qui, par suite du décalage du galet α vers l'Est (dispositif amortisseur), a un moment non nul par rapport à la verticale $M_1 N_1$; ce moment ne pouvant être compensé que par l'aimantation fictive, une légère déviation en azimut en résulte.

Cette erreur est quelquefois présentée, sous une forme très obscure d'ailleurs, comme provenant d'une vague tendance de l'axe NS à conserver son orientation dans l'espace pendant que la terre tourne, tendance qui produirait un retard (*lag*) de l'axe sur la rotation qui l'entraîne. La réalité est plus simple.

Dans le compas Sperry, l'erreur de latitude et l'erreur de vitesse sont corrigées automatiquement par un dispositif ingénieux commandé par deux boutons gradués, l'un en degrés de latitude, l'autre en nœuds. Ce correcteur déplace légèrement la ligne de foi de manière à rendre la lecture toujours correcte.

⁽⁶⁵⁾ Le cercle asservi est quelquefois présenté comme servant uniquement à décharger l'élément sensible de ce qui ne lui est pas indispensable, en particulier du contrepois. Ce qui a été dit au paragraphe 31 montre que, sans l'asservissement, tout amortissement

44. Étude élémentaire des déviations balistiques et du roulis⁽⁶⁶⁾. — Je suppose que le navire qui porte le compas passe des conditions de route (v_0, α_0) aux conditions (v_1, α_1) ; je conserve les notations et les hypothèses du paragraphe 35. Sous l'influence des forces d'inertie d'entraînement $-mJ$, le croisillon U s'incline, l'axe $\mathcal{N}S$ du gyro conservant l'orientation Nord-Sud. Si l'accélération J varie assez lentement, l'axe de symétrie M_1N_1 s'oriente sans retard sensible suivant la pesanteur apparente, s'inclinant de λ autour de OX et de γ autour de OY :

$$(12) \quad \lambda = -\frac{J_z}{g}; \gamma = \frac{J_x}{g}.$$

L'axe M_2N_2 de suspension de la boîte U_2 s'incline de λ autour de OX .

Le pendule gyro-balistique, étant à longue période, se meut très lentement vers sa nouvelle position d'équilibre, qui fait l'angle λ avec la verticale. Si l'évolution dure peu, ce déplacement est petit, le principal effet des forces d'inertie d'entraînement sur ce pendule étant de donner un mouvement de précession au petit gyro. Dans ces conditions, si on néglige le décalage du galet a' vers l'Est, on voit que l'action F du contrepooids, s'exerçant dans le vertical de l'axe $\mathcal{N}S$ du gyro, lui donne une précession sensiblement horizontale; c'est ce que montre clairement le théorème de Résal appliqué au système $U_1U_2U_3u_1u_2u_3$ avec projection sur M_1N_1 , puis au système $U_2U_3u_1u_2u_3$ avec projection sur M_2N_2 . Le moment cinétique de l'un ou de l'autre de ces systèmes se compose du moment cinétique $I\Omega$ du grand gyro, parallèle à OX , et du moment cinétique $j\omega$ du petit gyro, sensiblement parallèle à OY .

La vitesse du moment cinétique $j\omega$ est égale au moment de la force d'inertie d'entraînement $-\omega b \frac{J_z}{g}$ d'après le théorème de Résal appliqué au pendule. Le théorème de Résal appliqué à l'élément sensible, comme il a été dit, montre, par suite, l'identité de la vitesse du moment cinétique $I\Omega$ avec le moment des forces F et $-\omega b \frac{J_x}{g}$, ces deux vecteurs ayant mêmes projections sur $\mathcal{N}S$ (zéro), sur M_1N_1 , et sur M_2N_2 . Les forces F et $-\omega b \frac{J_x}{g}$ étant sensiblement dans le vertical de $\mathcal{N}S$, la vitesse du vecteur $I\Omega$ est donc sensiblement horizontale, et l'on a, à chaque instant de l'évolution,

$$(13) \quad \theta' = 0, \quad I\Omega\zeta' = -aF + \omega b \frac{J_x}{g}.$$

serait impossible, quelle que soit la position du contact a' , puisqu'il ne pourrait y avoir dissipation de l'énergie apparente. D'ailleurs, si le contrepooids était supporté par le cercle vertical U_1 , le théorème de Résal appliqué au système $U_1U_2U_3U_4u_1u_2u_3$ par rapport au point C , avec projection sur la verticale, éliminerait les réactions le long de l'axe M_2N_2 , qui seraient alors des forces intérieures, et l'on obtiendrait l'équation (2), quelle que soit la position du point a' . Or, comme on l'a vu, les équations (2) et (5) définissent une oscillation non amortie.

⁽⁶⁶⁾ Voir le compas gyroscopique Sperry..., 9; J. PELUCHON, 1, p. 105.

F est donné par la loi fondamentale appliquée au contrepois (équation des moments par rapport à $M_2N'_2$) :

$$(14) \quad aF \cos \lambda + Ql \frac{J_x}{g} = 0.$$

Remplaçant dans les équations (13), et les intégrant pendant toute la durée de l'évolution, j'obtiens approximativement la déviation

$$\delta\theta = 0; \quad I\Omega \delta\zeta = (Ql + \varpi b) \frac{\delta v}{g}.$$

Cette déviation amène le compas dans la position qui correspond aux nouvelles conditions de route (v_1, α_1) (§ 30), si l'on a

$$\frac{R}{g} = \frac{I\Omega}{(Ql + \varpi b) \varepsilon \cos L}.$$

Toute déviation balistique est donc supprimée, si la période du compas est celle du pendule de longueur R (85 minutes). Il est juste de retenir que cette conclusion n'a lieu que moyennant les approximations indiquées ci-dessus. En particulier, le galet a' est supposé rester dans le vertical de l'axe $\mathcal{N}\mathcal{S}$. Or, d'une part, le dispositif amortisseur (décalage de a' vers l'Est) a une certaine influence comme dans le cas de l'Anschütz; d'autre part, si l'évolution n'est pas de courte durée, le galet a' quitte la verticale $\mathcal{N}\mathcal{S}$, entraînant une variation de l'inclinaison θ pendant l'évolution, et, par suite, une déviation consécutive en azimut. Malgré ces réserves, l'amélioration introduite par le dispositif Sperry est très réelle (voir § 53).

Cette amélioration est manifeste, lorsqu'on étudie le roulis. Dans ce cas, l'accélération perturbatrice J a une orientation fixe et une variation sinusoïdale. Un roulis Est-Ouest agit peu sur les indications d'un Anschütz ou d'un Sperry : le compas obéit au roulis sans réagir, puisque cette oscillation ne tend pas à modifier l'orientation de l'axe du gyro.

Un roulis Nord-Sud a peu d'action, car les forces d'inertie — mJ_x ont seulement pour effet une précession alternative du gyro vers l'Est et vers l'Ouest, et, comme la période propre du compas est beaucoup plus longue que celle du roulis, l'amplitude est insensible.

Il n'en est pas de même pour un roulis oblique par rapport au méridien : soit, par exemple, un Sperry placé sur un navire faisant route au NE. Le roulis a la direction NW-SE. Sous l'influence des forces d'inertie — mJ , le croisillon oscille au roulis, mais l'axe M_2N_2 de suspension de la boîte du gyro oscille parallèlement au vertical EW (YOZ), car l'axe du gyro conserve sensiblement sa direction OX. Cette oscillation du croisillon, et, par suite, celle de M_2N_2 sont, à peu près, en phase avec le roulis, le croisillon ayant une période beaucoup plus courte que celle du roulis.

Les forces — mJ appliquées au contrepois sont dirigées vers le Nord quand le navire s'incline sur bâbord, vers le Sud quand il s'incline sur

tribord. Le contrepoids exerce donc sur la boîte du gyro une force supplémentaire qui donne au moment cinétique, d'après le théorème de Résal, une vitesse w perpendiculaire à la droite qui joint le centre C au galet a' , alternativement vers l'Est et vers l'Ouest.

Je suppose que le contrepoids agisse directement sur la boîte U_2 , a' étant fixe par rapport à U_2 ; il est évident que la vitesse du moment cinétique, tout en étant dirigée alternativement vers l'Est et vers l'Ouest, est alors toujours dirigée vers le bas, de sorte que l'extrémité $\mathfrak{N}$ du compas s'abaisse, diminuant l'action du contrepoids quand le navire s'incline sur tribord, l'augmentant quand il s'incline sur bâbord. $\mathfrak{N}$ poursuit donc son mouvement de descente en déviant vers l'Est. L'aimantation fictive intervient alors pour atténuer le mouvement de descente. Il devient intuitif que le compas oscille autour d'une nouvelle position d'équilibre déviée horizontalement et telle que la vitesse du moment cinétique due à l'aimantation fictive compense exactement la moyenne des composantes verticales de la vitesse due aux forces d'inertie d'entraînement du contrepoids.

C'est ainsi que se comporterait le Sperry s'il n'y avait pas de pendule gyro-balistique, c'est ainsi que se comporte l'Anschütz (comparer § 40).

La présence du pendule gyro-balistique permet au galet a' de rester dans le vertical $\mathfrak{N}S$, si la période de ce pendule est longue par rapport à celle du roulis; la vitesse w , due à l'action F du contrepoids et à la force d'inertie $-\frac{w}{g}J_x$ du pendule est alors horizontale, et toute tendance du compas à dévier vers l'Est disparaît. Les inconvénients de l'oscillation du pendule sont atténués si on peut le faire osciller en quadrature avec le roulis. Dans ce cas, l'inclinaison de l'axe $\mathfrak{N}S$ pendant chaque quart de période est compensée par une inclinaison égale et de sens opposé pendant le quart suivant.

Dans le raisonnement précédent, l'inertie du système cercle vertical-boîte n'a pas été considérée; or, au roulis, son influence n'est pas négligeable. Dans l'Anschütz, le flotteur oscille autour d'un axe parallèle à l'axe du gyro, axe principal d'inertie au point fixe O , de sorte que la vitesse de son moment cinétique en O est portée par cet axe. Les composantes suivant OY et OZ de la vitesse du moment cinétique du système flotteur-gyro sont donc dues uniquement au changement d'orientation du moment cinétique $I\Omega$ du gyro, et les formules (6) et (7) du paragraphe 35 subsistent sensiblement.

Dans le Sperry, le cercle vertical a un mouvement plus complexe: la charnière M_1N_1 oscille sensiblement dans le plan vertical du roulis, tandis que la parallèle issue de O à la charnière M_2N_2 oscille dans le vertical $E-W$. Les notices (note 14, p. 6) attribuent l'influence de l'inertie de ces organes aux forces d'inertie centrifuges des éléments dans une oscillation qui aurait lieu autour de l'axe longitudinal du navire: cette influence se représenterait donc par des termes contenant les seules dérivées premières λ' , γ' ; la réalité est moins simple, la rotation du cercle vertical ne s'effectuant pas autour d'un axe fixe. L'étude faite au paragraphe 48

montre que cette influence se représente non seulement par des termes contenant λ' et γ' , mais par des termes de même importance contenant aussi les dérivées secondes.

45. Mise en équations plus précise. — Soit $\Delta \mid \frac{\pi}{2}$ l'azimut de la charnière M_0N_0 autour de laquelle tourne l'anneau U_0 de Cardan. Cette charnière se confond, par exemple, avec la ligne de foi du navire. En faisant tourner le trièdre $OXYZ$ de l'angle Δ autour de OZ , puis de l'angle μ autour de la nouvelle position de OY , j'obtiens des axes principaux d'inertie de l'anneau; une nouvelle rotation de l'angle ν autour de la nouvelle position MN de OX donne des axes principaux d'inertie $OX'YZ'$ du croisillon. Δ est fini, μ et ν sont nuls dans la position d'équilibre; μ et ν restent petits dans ce qui va suivre.

L'introduction provisoire des paramètres μ et ν est utile, mais il y a intérêt, à cause de la valeur finie de l'angle Δ , à les remplacer par les paramètres χ, γ, λ , qui définissent, par la méthode habituelle (§ 26), un trièdre auxiliaire $OX''Y''Z''$, déduit du trièdre $OX'YZ'$ par une rotation de l'angle $-\Delta$ autour de OZ' . Ce trièdre se confond avec le trièdre de référence $OXYZ$, lorsque μ et ν sont nuls; il n'est lié au croisillon que lorsque Δ , c'est-à-dire le cap, reste constant.

Les relations entre χ, γ, λ d'une part, et Δ, μ, ν d'autre part, sont

$$(1) \quad \chi = \frac{\sin \Delta}{2} (\lambda \nu - \mu \gamma); \quad \mu = \gamma \cos \Delta - \lambda \sin \Delta; \quad \nu = \gamma \sin \Delta + \lambda \cos \Delta,$$

si l'on se borne, comme dans les études précédentes, aux termes du second ordre en μ et ν , ou, ce qui revient au même, en γ et λ . On voit que χ est du second ordre.

Je rapporte la position des organes du compas à ce trièdre auxiliaire $OX''Y''Z''$. Une rotation de l'angle ζ autour de OZ'' (ou M_1N_1) donne le trièdre principal du cercle vertical U_1 ; une nouvelle rotation de l'angle θ autour de M_2N_2 donne le trièdre principal de la boîte U_2 . Une rotation de ce dernier trièdre, de l'angle α autour de son axe des x (ou $\mathcal{N}\mathcal{S}$), donne en direction le trièdre principal du pendule u_1 , lequel trièdre, par une rotation de l'angle β autour de son axe des z (soit m_2n_2) donne enfin le trièdre principal de la boîte u_2 du petit gyro. Je poserai $OG = e$, $oG = h$.

Le trièdre principal du cercle asservi U_4 se détermine, par rapport au trièdre auxiliaire, au moyen d'un angle ξ analogue à l'angle ζ servant à la détermination du cercle vertical. Une rotation de l'angle $\varphi + \eta$ autour de l'axe M_2N_2 donne un trièdre dont le plan des yz contient le centre de gravité du contrepoids U_5 ; ce trièdre est lié à U_5 ; η est la constante à laquelle se réduit $\varphi + \eta$ dans la position d'équilibre (voir § 42).

La position du système dépend des paramètres $\gamma, \lambda, \zeta, \theta, \alpha, \beta, \xi$, sans compter les angles de rotation propre des deux gyros. Δ est une fonction donnée de t , qui se réduit à une constante, si le navire conserve son cap. χ est, par suite, fonction de γ , de λ et, peut-être de t (éq. 1). φ est une

fonction des paramètres précédents, qu'on obtient en exprimant que le centre du galet a' est situé dans le plan de chacune des deux gouttières circulaires dans lesquelles il se meut. J'obtiens ainsi, en négligeant le troisième ordre,

$$(2) \quad \varphi - \theta = (\zeta - \xi)(\alpha - \rho)$$

(ρ est l'angle constant dont le galet a' est décalé vers l'Est pour réaliser l'amortissement; § 43).

J'appliquerai les équations de Lagrange des systèmes asservis (§ 15). La *liaison d'asservissement* s'exprime par l'équation

$$(3) \quad \xi - \zeta = 0;$$

les déplacements annulant le travail virtuel des forces de liaison de deuxième espèce sont ceux qui vérifient la relation

$$\delta(\xi - \zeta) = 0;$$

comme, d'autre part, les déplacements virtuels à considérer doivent laisser t , et, par suite, Δ invariables, cette condition se réduit à

$$(4) \quad \delta\xi = 0.$$

On se trouve ainsi dans le cas particulier défini au paragraphe 9; le mouvement sera défini par l'équation d'asservissement jointe aux équations de Lagrange correspondant aux paramètres $\gamma, \lambda, \zeta, \theta, \alpha, \beta$, et aux équations qui expriment la constance de la vitesse de rotation des deux gyros.

J'observerai, dans ces calculs, le même degré d'approximation que dans le cas de l'Anschütz (§ 36). Je conserverai les éléments susceptibles de donner, dans les équations définitives, des termes du premier ordre par rapport aux paramètres. Lorsque J sera différent de zéro, je conserverai en outre, dans ces équations, les termes du second ordre en $J, \lambda, \gamma, \alpha, \beta$, négligeant les produits de ces quantités par les déviations en azimut et en inclinaison du grand gyro, et par les dérivées des déviations en azimut et en inclinaison du petit gyro, puisque son orientation varie lentement.

Or, les composantes $1, V, W$ du vecteur unitaire porté par l'axe du grand gyro, suivant les axes de référence, et les composantes $u, 1, w$ du vecteur unitaire porté par l'axe du petit gyro sont données par les formules

$$(5) \quad \begin{cases} V = \chi + \zeta + \theta\lambda; & W = -\gamma - \theta + \lambda\zeta; \\ u = -\chi - \zeta - \beta + \lambda\gamma + \alpha\gamma + \alpha\theta; & w = \lambda + \alpha + \gamma\zeta + \beta\gamma + \beta\theta. \end{cases}$$

Je considérerai donc $\zeta, \gamma + \theta, \lambda' + \alpha', \beta'$ comme petits, par rapport à γ et λ , et négligerai leurs produits par λ et γ .

Dans les girations, l'accélération normale a pour valeur $v\Delta'$, si v est la vitesse du navire; Δ' est donc du même ordre que J . Si la vitesse varie au cours d'une giration circulaire, l'accélération tangentielle est $v' = v \frac{\Delta''}{\Delta'}$; Δ'' est donc de l'ordre de J^2 . Je n'envisagerai pas le cas d'une variation de vitesse sur une trajectoire quelconque.

La force vive de l'anneau U_0 est

$$(6) \quad B_0 \mu'^2 + C_0 \Delta'^2.$$

Celle du croisillon, y compris la masse des autres organes asservis ou non, concentrée au point C, est

$$(7) \quad A(\nu' - \Delta'\mu)^2 + B(\mu' + \Delta'\nu)^2 + C(\Delta' - \mu'\nu)^2.$$

Dans ces deux expressions, μ et ν seront supposés remplacés en fonction de λ et de γ à l'aide des formules (1).

Pour avoir la force vive du cercle vertical, je dois ajouter la force vive de son mouvement autour de C (théorème de Koenig), soit

$$(8) \quad A_1(\lambda' + \zeta\gamma')^2 + B_1(\gamma' - \lambda'\zeta)^2 + C_1(\zeta' + \chi' - \lambda\gamma')^2.$$

Pour avoir la force vive du système formé par la boîte U_2 , le gyro U_3 concentré en son centre, le pendule gyro-balistique concentré en o , ce qui constitue un système de centre de gravité C et la surcharge (voir note 61, p. 60) de la partie inférieure de U_2 , que je représente par un corps de poids p fixé à la distance a de C, je dois adjoindre, d'une part, la force vive du mouvement de tout ce système autour de C,

$$(9) \quad A_2(\lambda' - \zeta\gamma' - \zeta'\theta)^2 + B_2(\theta' + \gamma' - \lambda'\zeta)^2 + C_2(\zeta' + \chi' - \lambda\gamma' - \lambda'\theta)^2,$$

et, d'autre part, l'expression $2M(\vec{V}_0 \cdot \vec{v}_o)$ [§ 27] relative à la surcharge, soit

$$(10) \quad 2 \frac{ap}{g} e[\gamma'(\theta' + \gamma') + \lambda'(\lambda - \zeta\theta')].$$

Pour avoir la force vive du gyro dont je représente la vitesse de rotation propre par Ψ' , je dois adjoindre la force vive du mouvement autour de son centre de gravité, soit

$$(11) \quad B_3(\theta' + \gamma' - \lambda'\zeta)^2 + C_3(\zeta' + \chi' - \lambda\gamma' + \lambda'\theta)^2 \\ + I \left[\Psi' + \lambda' \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + \gamma'\zeta - \theta\zeta' - (\gamma + \theta)\chi' + \lambda\theta\gamma' \right]^2.$$

Pour avoir la force vive du système $U_4 U_5$ (cercle asservi, contrepoids), je dois ajouter, d'une part, la force vive de leur mouvement autour de C , soit

$$(12) \quad A_4(\lambda' + \xi\gamma')^2 + B_4(\gamma' - \lambda'\xi)^2 + C_4(\xi + \chi' - \lambda\gamma')^2$$

$$(13) \quad + A_5[\lambda' + \xi\gamma' - \xi(\varphi + \eta)]^2 + B_5(\varphi' + \gamma' - \lambda'\xi)^2 \\ + C_5[\xi + \chi' - \lambda\gamma' + \lambda'(\varphi + \eta)]^2$$

et, d'autre part, l'expression de la forme $2M(\vec{V}_0 \cdot \vec{v}_c)$ du paragraphe 27, soit

$$(14) \quad 2 \frac{Ql}{g} e[\gamma'(\varphi' + \gamma') + \lambda'^2].$$

Pour avoir la force vive du pendule gyro-balistique avec la masse de son gyro $u_2 u_3$ concentrée en son centre c , je dois adjoindre la force vive de ce système dans son mouvement autour de o , soit

$$(15) \quad a_1(\alpha' + \lambda' + \zeta\gamma' - \zeta\theta)^2 + b_1(\theta' + \gamma' - \lambda'\zeta + \alpha\zeta')^2 \\ + c_1(\zeta' + \chi' - \lambda\gamma' + \lambda'\theta - \alpha\theta' - \alpha\gamma')^2,$$

et, d'autre part, l'expression

$$(16) \quad 2 \frac{\pi b}{g} e[\lambda'(\alpha + \lambda - \zeta\theta)' + \gamma'(\theta' + \gamma' + \alpha\zeta)'] + 2 \frac{\pi b}{g} h(\alpha' + \lambda')(\zeta' + \chi' - \gamma'\lambda + \theta\lambda').$$

Pour avoir la force vive du petit gyro u_3 avec sa boîte u_2 , je dois adjoindre la force vive de leur mouvement autour de c , soit

$$(17) \quad (a_2 + a_3)(\alpha' + \lambda' + \zeta\gamma' - \zeta\theta + \theta'\beta + \gamma'\beta)^2 + b_2(\theta' + \gamma' - \lambda'\zeta + \alpha\zeta' - \alpha'\beta - \lambda'\beta)^2 \\ + (c_2 + c_3)(\beta' + \zeta' + \chi' - \lambda\gamma' + \lambda'\theta - \alpha\theta' - \alpha\gamma')^2 \\ + j\left[\psi' + \theta'\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \gamma' + \chi'(\lambda + \alpha) - \lambda'(\beta + \zeta - \alpha\theta) + \alpha\zeta' - \beta\alpha'\right]^2,$$

ψ' désignant la vitesse de rotation propre du petit gyro⁽⁶⁷⁾.

J'évalue le travail virtuel de la pesanteur apparente en supposant les poids apparents de la surcharge, du contrepoids et du gyro-balistique transportés, les deux premiers en C , l'autre en o ; si Π est le poids total,

⁽⁶⁷⁾ Dans le système d'unités industrielles kg-force, mètre, seconde, πb est de l'ordre de 0,15; ω , vitesse de régime du petit gyro = 700, $j\omega$ est de l'ordre de 0,02 à 0,03; la période propre du gyro-balistique est de 12 à 15 (note 62 et mesures grossières sur un échantillon).

/ la distance du point fixe O au centre de gravité du système (compte tenu de ce transport de masses) ce travail est la différentielle de l'expression

$$(18) \quad -\Pi f\left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2}\right) + \Pi f\frac{J_z}{g}\gamma - \Pi f\frac{J_z}{g}\lambda.$$

J'y ajoute le travail des couples introduits par cette translation, soit la différentielle des expressions

$$(19) \quad ap\left[\frac{J_x}{g}(\theta + \gamma) + \frac{J_z}{g}(\theta\zeta - \lambda) - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{(\gamma + \theta)^2}{2} + \lambda\theta\zeta\right],$$

$$(20) \quad Ql\left[\frac{J_x}{g}(\varphi + \gamma) - \lambda\frac{J_z}{g} - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{(\gamma + \varphi + \eta)^2}{2}\right],$$

$$(21) \quad \varpi b\left[\frac{J_x}{g}(\theta + \gamma + \alpha\zeta) + \frac{J_z}{g}(\theta\zeta - \lambda - \alpha) - \frac{(\lambda + \alpha)^2}{2} - \frac{(\gamma + \theta)^2}{2} + \zeta(\lambda\theta - \alpha\gamma)\right].$$

Le travail de l'aimantation fictive est la différentielle de

$$(22) \quad -I\Omega\varepsilon \cos L\left[\frac{(\theta + \gamma)^2}{2} + \frac{\zeta^2}{2}\right] + I\Omega\varepsilon \sin L(\lambda\zeta - \gamma - \theta).$$

Le travail de l'action du ressort est de la forme

$$(23) \quad -(k\beta + k_1\beta')\delta\beta,$$

en tenant compte de son amortissement propre.

Enfin, je suppose que des résistances passives s'opposent à la variation de λ et de γ ; leur travail virtuel est de la forme

$$(24) \quad -m\gamma'\delta\gamma - n\lambda'\delta\lambda.$$

Dans celle des équations de Lagrange qui correspond au paramètre γ , figure un terme en $I\Omega(\zeta' + \chi' + \dots)$; ce même terme figure dans l'équation correspondant à θ ; je retrancherai donc ces deux équations; je ferai de même disparaître $j\omega$ en retranchant les équations correspondant à λ et à α ; j'obtiens ainsi, en posant

$$(25) \quad \mathcal{A} = A + A_1 + A_2 + A_4 + A_5 + 2e\frac{Ql + ap}{g}; \quad \mathcal{B} = B_0 + B + B_1 + B_4,$$

les deux équations

$$(26) \quad \mathcal{B}\gamma'' + m\gamma' - \lambda'\Delta'(B_0 + C) + (A - B - B_0)(\gamma'\sin^2\Delta + \lambda'\sin\Delta\cos\Delta) \\ + \frac{ap + Ql + \varpi b}{g}e(\gamma'' + \theta'') = \Pi f\left(\frac{J_x}{g} - \gamma\right);$$

$$(27) \quad \lambda \lambda'' + n\lambda' + \gamma' \Delta' (B_0 + C) + (A - B - B_0) (\gamma' \sin \Delta \cos \Delta - \lambda' \sin^2 \Delta)' + \frac{\pi b}{g} e (\lambda'' + \alpha'') \\ = - (\Pi f + ap + Ql) \left(\lambda + \frac{J_z}{g} \right) + I\Omega \varepsilon \sin L \zeta.$$

Elles font connaître λ et γ en fonction de t , si l'on remarque que les termes en $\gamma'' + \theta''$, $\lambda'' + \alpha''$ et $I\Omega \varepsilon \sin L \zeta$ sont tout à fait négligeables vis-à-vis des autres.

Ces équations se simplifient, si l'on réalise l'égalité des moments d'inertie A et $B + B_0$; elles se réduisent alors à

$$(28) \quad \mathfrak{W}_3 \gamma'' + m\gamma' - \lambda' \Delta' (B_0 + C) = \Pi f \left(\frac{J_z}{g} - \gamma \right),$$

$$(29) \quad \lambda \lambda'' + n\lambda' + \gamma' \Delta' (B_0 + C) = - (\Pi f + ap + Ql) \left(\frac{J_z}{g} + \lambda \right).$$

Lorsque le navire conserve son cap ($\Delta' = 0$), on voit que λ et γ oscillent indépendamment. Dans une giration circulaire, l'oscillation libre de chacun de ces deux paramètres est la superposition de deux mouvements sinusoïdaux amortis ayant pour périodes les périodes propres de λ et de γ légèrement modifiées.

Pour écrire les autres équations de Lagrange commodément, j'introduirai les paramètres V , W , u , w , définis par les équations (5) et (6). Les termes gyrostatiques qui figurent dans les équations relatives à ζ , θ , α , β sont respectivement

$$I\Omega(W - \lambda V') + j\omega(w' + \gamma u'); \quad I\Omega(V + \lambda W') + j\omega\lambda w'; \quad j\omega u'; \quad j\omega w'.$$

Il est naturel de combiner ces équations de manière à isoler V' , W' , u' , w' , surtout en vue de l'étude des perturbations. Je multiplierai donc ces équations par 1, λ , $-\gamma$, -1 , et les ajouterai : j'isolerais ainsi W' ; puis je multiplierai la première par $-\lambda$, la seconde par 1, et je les ajouterai : j'isolerais ainsi V' ; enfin, je conserverai les deux dernières; j'obtiens ainsi les quatre équations

$$(30) \quad (B_1 - A_1 + C_1) \lambda' \gamma' + \left(C_1 + A_2 + \frac{ap}{g} e \right) \lambda'' \gamma + \frac{ap}{g} e \lambda \gamma'' + \ominus V'' + \frac{\pi b}{g} h w'' + I\Omega W' \\ = ap \left(\lambda \frac{J_z}{g} - \gamma \frac{J_z}{g} - \lambda \gamma \right) + Ql \rho \left(\gamma + \theta + \eta - \frac{J_z}{g} \right) - Ql (\lambda + \alpha) \left(\eta - \frac{J_z}{g} \right) \\ + \pi b \frac{J_z}{g} (\alpha + \lambda) - \tau \zeta + k\beta + k_1 \beta';$$

$$1) \quad - \mathfrak{W}_3 W'' + \frac{\mathcal{P}}{g} e \gamma'' + I\Omega V' = \mathcal{P} \frac{J_z}{g} - (\mathcal{P} + \tau) (\gamma + \theta) - Ql \eta - \sigma;$$

$$(32) \quad (a_1 + a_2 + a_3)w'' + \frac{\varpi b}{g}e\lambda'' + \frac{\varpi b}{g}hV'' + j\omega u' = -\varpi b\left(w + \frac{I}{g}\right);$$

$$(33) \quad -(c_2 + c_3)u'' + j\omega w' = -k\beta - k_1\beta';$$

où j'ai posé

$$(34) \quad \mathfrak{B}_1 = B_2 + B_3 + B_5 + b_1 + b_2; \quad \mathfrak{C} = C_1 + C_2 + C_3 + c_1;$$

$$(35) \quad \mathfrak{Q} = Ql + \varpi b + ap; \quad \tau = I\Omega\varepsilon \cos L; \quad \sigma = I\Omega\varepsilon \sin L.$$

46. **Équilibre et oscillation libre.** — La position d'équilibre s'obtient en annulant les dérivées et l'accélération J. Si l'on s'impose la condition $\theta = 0$, on retrouve les équations (4') et (10) du paragraphe 43. En comptant ζ à partir de la valeur qui correspond à l'équilibre, ou, d'une manière plus précise, en déplaçant légèrement l'axe OX de la quantité constante $-\rho \lg L$, je supprime les termes constants de ces équations.

Pour étudier l'oscillation libre, je négligerai l'inertie non gyrostatique, qui, comme on l'a vu pour l'Anschütz, a peu d'influence. J'obtiens ainsi, en remarquant que V, W, u, w valent alors respectivement ζ , $-\theta$, $-\beta - \zeta$, α , les équations suivantes, où τ est négligé devant $\mathfrak{Q}$,

$$(36) \quad I\Omega\theta' = Ql(\alpha\eta - \rho\theta) + \tau\zeta - k\beta - k_1\beta';$$

$$(37) \quad I\Omega\zeta' = -\mathfrak{Q}\theta;$$

$$(38) \quad j\omega(\beta' + \zeta') = \varpi b\alpha;$$

$$(29) \quad j\omega\alpha' = -k\beta - k_1\beta',$$

dont l'équation caractéristique est

$$(40) \quad (I^2\Omega^2r^2 + Ql\rho I\Omega r + \tau\mathfrak{Q})(j^2\omega^2r^2 + k_1\varpi br + k\varpi b) + \mathfrak{Q}j\omega r(k + k_1r)(j\omega r + Ql\eta) = 0.$$

La première parenthèse a les racines r_1 et r_2 que donne la théorie élémentaire négligeant l'influence du gyro-balistique; les racines r_3 et r_4 de la seconde parenthèse correspondent à l'oscillation propre du gyro-balistique (§ 29). L'équation elle-même s'écrit

$$(41) \quad (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4) + \mu r(r - r_5)(r - r_6) = 0,$$

en posant

$$(42) \quad \mu I^2\Omega^2 = \mathfrak{Q}k_1; \quad j\omega r_5 = -Ql\eta = \sigma; \quad k_1r_6 = \frac{\sigma}{\omega} - k.$$

μ étant très petit, deux racines r'_1 et r'_2 de cette équation sont voisines de r_1 et r_2 ; les deux autres sont voisines de r_3 et r_4 . Leurs développements suivant les puissances de μ donnent, pour les premiers termes, en négligeant r_1 et r_2 devant r_3 et r_4 ⁽⁶⁸⁾,

$$(43) \quad r'_1 = r_1 + \frac{\mu}{r_3 r_4} \frac{r_1(r_1 - r_5)(r_1 - r_6)}{r_2 - r_1}; \quad r'_3 = r_3 + \mu \frac{(r_3 - r_5)(r_3 - r_6)}{r_3(r_4 - r_3)};$$

et deux formules analogues pour r'_2 et r'_4 .

Le facteur d'amortissement de l'oscillation longue est

$$\lambda = -\frac{r'_1 + r'_2}{2};$$

en le comparant à $-\frac{r_1 + r_2}{2}$, on vérifie que la présence du gyro-balistique n'influe qu'insensiblement sur ce facteur. Suivant le signe de la latitude et le sens de rotation du petit gyro, ce facteur est augmenté ou diminué d'une quantité négligeable n'atteignant pas 10^{-3} de sa valeur (voir note 67, p. 70, et § 42). La période est augmentée ou diminuée, suivant les signes de L et de ω , d'une quantité n'atteignant pas 10^{-3} de sa valeur. La modification des racines r'_3 et r'_4 est insignifiante aussi.

Il est intéressant de remarquer incidemment que *l'asservissement ne contribue en rien à l'amortissement du gyro-balistique*. Si même son amortissement propre était nul, on vérifie sur les équations (43) que les racines r'_3 et r'_4 représenteraient une oscillation *divergente* lorsque L et ω sont de signes différents.

47. Calcul des amplitudes. — Les calculs des amplitudes des diverses oscillations donne nettement l'aspect du mouvement; dans l'étude des déviations balistiques, il permet aussi d'apprécier l'importance des oscillations qui suivent la perturbation.

Lorsqu'on substitue à θ , ζ , α , β , des expressions exponentielles de la forme

$$\theta = \Theta e^{rt}, \quad \zeta = Z e^{rt}, \quad \alpha = A e^{rt}, \quad \beta = B e^{rt},$$

on trouve pour déterminer Θ , Z , A , B quatre équations linéaires homogènes. La condition de compatibilité s'obtient en annulant le déterminant D des coefficients : c'est l'équation caractéristique (40). La théorie de ces équations montre que les valeurs de Θ , Z , A , B sont proportionnelles aux mineurs correspondant aux éléments d'une même ligne de D , ces mineurs étant affectés de signes alternés.

⁽⁶⁸⁾ Le calcul des limites (E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, Paris, 1902, t. I, p. 447) appliqué au développement de ces racines, montre que la convergence est largement assurée par la valeur numérique de μ .

Les coefficients Θ_1, Z_1, A_1, B_1 , correspondant à la racine r'_1 sont imaginaires conjugués des coefficients $\Theta_2, Z_2, \dots$ correspondant à la racine r'_2 . Les amplitudes initiales sont $\sqrt{\Theta_1\Theta_2}, \sqrt{Z_1Z_2}, \dots$. Utilisant les mineurs des éléments de la première ligne, et négligeant r'_1, r'_2 devant r'_3 , j'obtiens, comme quantités proportionnelles, sensiblement

$$(44) \quad k\varpi b\sqrt{\mathcal{P}\tau}, \quad k\varpi b\mathcal{P}, \quad \frac{j\omega}{\Omega}\mathcal{P}k\sqrt{\mathcal{P}\tau}, \quad \left(\frac{j\omega}{\Omega}\right)^2\mathcal{P}^2\tau.$$

On vérifie sur ces nombres que l'amplitude de ζ vaut environ vingt-cinq fois celle de θ ; l'amplitude de α est une faible fraction de celle de θ ; celle de β est encore beaucoup plus petite.

Pour les amplitudes des oscillations correspondant aux racines r'_3 et r'_4 , les mineurs des éléments de la troisième ligne sont plus commodes, ils donnent comme quantités sensiblement proportionnelles aux amplitudes de $\theta, \zeta, \alpha, \beta$,

$$(45) \quad \frac{\Omega}{j\omega}k^{\frac{3}{2}}\varpi b\sqrt{k+k_1\frac{\sigma}{j\omega}}; \quad \mathcal{P}k\sqrt{\varpi b\left(k+k_1\frac{\sigma}{j\omega}\right)}; \quad k^2\varpi b\left(\frac{\Omega}{j\omega}\right)^2; \quad (k\varpi b)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\Omega}{j\omega}\right)^2.$$

On vérifie que les amplitudes de ζ et de θ sont beaucoup plus petites que celles de α et de β , le rapport de ces deux dernières étant $\sqrt{\frac{k}{\varpi b}}$.

En résumé, la variation de ζ et de θ est due presque exclusivement aux racines r'_1 et r'_2 ; celle de α et de β , aux racines r'_3 et r'_4 , ce qui justifie les résultats donnés par la théorie élémentaire. α reste très petit, si k est petit, de sorte que le pendule reste presque vertical. Une grande valeur initiale de α amènerait des perturbations, car l'amplitude de β serait grande et le gyro pourrait venir heurter ses butoirs.

48. Déviations balistiques. Roulis. — J'étudie d'abord l'influence du *roulis*, qui montrera mieux les conditions que doit remplir le compas; je supposerai ensuite ces conditions remplies dans l'étude de déviations balistiques.

Je conserve les notations et les hypothèses du paragraphe 40; j'applique la méthode aux équations actuelles (28) à (33); Δ' étant nul, les équations (28) et (29) montrent que λ et γ oscillent indépendamment, présentant, si le roulis est régulier, les oscillations forcées

$$(46) \quad \gamma = \mathcal{G} \cos \Delta \cos(st + \varphi); \quad \lambda = \mathcal{L} \sin \Delta \cos(st + \psi);$$

— $\mathcal{G}$ et $\mathcal{L}$ étant voisins de $\frac{j_0}{g}$.

Les équations (32) et (33), où l'on peut confondre u' et $-\beta'$, ζ variant très lentement, et où l'on peut négliger les termes non gyrostatiques des

premiers membres, donnent pour β et pour $\lambda + \alpha$ une oscillation forcée de faible amplitude si la période propre du pendule est longue par rapport à celle du roulis, ou d'amplitude appréciable, dans le cas de deux périodes du même ordre de grandeur, mais fortement décalée, si l'amortissement propre du ressort est grand.

L'oscillation forcée de $\lambda + \alpha$ est de la forme

$$(47) \quad \lambda + \alpha = w = w \sin \Delta \cos (st + \chi), \quad (w = \text{const.})$$

$w \cos \chi$ étant petit, si les conditions indiquées sont réalisées.

Les équations (30) et (31) donnent alors, pour définir la déviation permanente, les équations

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\tau V_0}{\sin \Delta \cos \Delta} &= \left(A_1 + A_2 - B_1 + 2 \frac{ap}{g} e \right) s^2 G \int \cos (\varphi - \psi) - (Ql + \varpi b) w \cos \chi \frac{J_0}{g} \\ &+ ap \left[\frac{J_0}{g} G \cos \varphi - \frac{J_0}{g} \int \cos \psi - \int G \cos (\varphi - \psi) \right]; \\ W_0 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Dans la première de ces équations, j'ai négligé les termes en $\tau \int G$, $\tau \int^2$, dont l'influence est insensible : dans l'exemple numérique indiqué au paragraphe 40, leur influence sur V_0 serait de l'ordre de deux minutes.

Le premier terme de l'expression de V_0 est important, mais il est facile de le faire disparaître en imposant aux moments d'inertie la condition

$$(49) \quad A_1 + A_2 + 2 \frac{ap}{g} e = B_1.$$

C'est le but des *poids compensateurs* réglables fixés au cercle vertical pour réaliser l'égalité de ces moments d'inertie.

Le deuxième terme représente l'influence de l'oscillation du pendule gyro-balistique; il est proportionnel à $w \cos \chi$; il est petit, si la période du pendule est beaucoup plus longue que celle de la houle, mais, s'il peut y avoir synchronisme, ce terme prend une valeur importante; dans le cas d'un amortissement notable du pendule, ce maximum est moins considérable, mais il dépasse cependant $\frac{J_r}{g}$, valeur correspondant à ce que donnerait un Anschütz; il est donc indispensable que la période soit beaucoup plus longue que celle de la houle. La période indiquée (12 à 15^s) semble nettement insuffisante. Quant à la surcharge p , son utilité n'apparaît pas au degré d'approximation admis. Le produit ap ayant la valeur 0,017, son influence est, d'ailleurs faible : dans l'exemple numérique défini au paragraphe 40, la déviation qu'il entraîne serait, en effet, inférieure à 10 minutes. Elle ne peut être utilisée pour compenser le premier terme ou le deuxième qui varient avec s , donc avec la période du roulis, elle ne peut,

pour cette même raison, compenser aucun terme contenant en facteur des moments d'inertie. Elle ne peut être utilisée que pour compenser des termes provenant des forces données ou d'inertie d'entraînement qu'une approximation plus serrée ferait apparaître, à condition qu'ils varient comme $\sin \Delta \cos \Delta$ avec l'azimut du roulis.

En résumé, on voit, que, sous certaines conditions de réglage et de construction, ce compas peut constituer un progrès important sur l'Anschütz. Ceci suppose, bien entendu, que l'amplitude du roulis soit assez faible pour justifier les approximations précédentes et que le galet a' se meuve librement le long de U_2 , sans se coincer.

J'aborde le problème des *déviation balistiques*, les poids compensateurs étant supposés convenablement réglés. J'applique la méthode du paragraphe 39 dont je conserve les hypothèses et les notations : t_2 désigne l'instant où λ , γ , α , β et leurs dérivées premières ont retrouvé la valeur zéro. Je supposerai que ce temps soit suffisamment petit par rapport à la période du compas pour que V et W aient peu varié. Des conventions que je viens de faire résultent les égalités

$$(50) \quad \int_0^{t_2} (\lambda'' \gamma + \lambda' \gamma') dt = \int_0^{t_2} d(\lambda' \gamma) = 0; \quad \int_0^{t_2} (\lambda' \gamma'' + \lambda'' \gamma') dt = 0.$$

Dans l'équation (30) multipliée par dt et intégrée dans l'intervalle $(0, t_2)$ apparaît alors, au premier membre, le terme

$$(51) \quad \left(A_1 + A_2 + 2 \frac{ap}{g} e - B_1 \right) \int_0^{t_2} \lambda' d\gamma,$$

montrant que l'influence des poids compensateurs se fait sentir ici : leur réglage supprime ce terme.

Les équations (30) et (31) intégrées de 0 à t_2 donnent, en tenant compte de ce réglage, et utilisant l'équation (33),

$$(52) \quad \begin{aligned} I\Omega \delta W = & ap \int_0^{t_2} \left(\lambda \frac{J_x}{g} - \gamma \frac{J_r}{g} - \lambda \gamma \right) dt - Ql\rho \frac{\delta v_x}{g} \\ & + (Ql + \varpi b) \int_0^{t_2} \frac{J_x}{g} (\alpha + \lambda) dt; \end{aligned}$$

$$(53) \quad I\Omega \delta V = Q \frac{\delta v_x}{g}.$$

J'ai négligé dans l'équation (52) le terme $\sigma \int (\alpha + \lambda) dt$, dont la valeur est insignifiante.

Ces équations sont d'accord avec la théorie élémentaire dans l'hypothèse d'une perturbation de durée suffisamment courte pour que $\alpha + \lambda$ n'ait pas

le temps de prendre de valeur appréciable; dans cette théorie, en effet, la surcharge p et l'amortissement (coefficient ρ) ont été négligés. L'équation (53) montre que la déviation en azimut à l'instant t_2 (ou à l'instant t_1) est annulée, si la période du compas est celle d'un pendule ayant pour longueur le rayon de la terre.

L'équation (52) montre que le terme dû à l'amortissement dans l'expression de δW est le produit de $\frac{\delta v_1}{g}$ par le double du facteur d'amortissement; à amortissement égal, c'est la même chose que pour l'Anschütz. Ce terme est indépendant de la rapidité avec laquelle s'effectue le changement d'allure.

Si la durée de la perturbation est plus longue (comparable à la période du gyro-balistique), il est indispensable de tenir compte des valeurs prises par $\lambda + \alpha$.

Je suppose qu'il s'agisse d'une variation de vitesse à cap constant, avec une accélération constante J

$$(54) \quad J_x = -J \sin \Delta; \quad J_y = J \cos \Delta.$$

Les équations (32) et (33) donnent les valeurs de w et de β , dont je peux confondre la dérivée avec $-u'$. Négligeant les forces d'inertie non-gyrostatiques, w s'obtient en ajoutant à $-\frac{J}{g} \cos \Delta$ une expression sinusoïdale amortie; sa variation est représentée ci-contre (fig. 6).

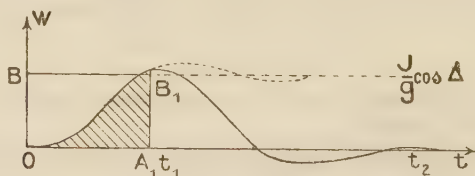


Fig. 6.

L'intégrale $\int_0^{t_2} \frac{J_x}{g} (\alpha + \lambda) dt$ qui figure dans l'expression de $I\Omega \delta W$ avec le coefficient $(Ql + \varpi b)$, et donne l'influence de l'obliquité du gyro-balistique, est le produit de $\frac{J_x}{g} = -\frac{J}{g} \sin \Delta$ par l'aire couverte de hachures. Il est manifeste sur la figure que cette intégrale est une fraction inférieure à l'unité de l'intégrale $-\int_0^{t_2} \frac{J_x J_y}{g^2} dt$, qui serait représentée par l'aire du rectangle $OA_1 B B_1$ multipliée par $-\frac{J_x}{g}$. Cette fraction est d'autant plus petite que la période du gyro-balistique est plus longue et son amortissement plus grand. Sa valeur comparée à l'unité donne une appréciation précise du degré de supériorité du Sperry sur l'Anschütz. Le terme lui-même est pro-

portionnel à $\sin \Delta \cos \Delta$; il est maximum lorsque la route fait un angle de 45° avec le méridien.

Je vais étudier le coefficient de ap dans l'équation (52), non pas tant pour le Sperry (single-gyro) lui-même, que pour le Sperry (twin-gyro) où il se retrouve et pour l'Anschütz 1906 (§ 39) où se retrouve un coefficient analogue.

Si les équations (28) et (29) donnent à λ et à γ la même période T et le même facteur d'amortissement k , on peut poser

$$(55) \quad \lambda = \varphi \cos \Delta, \quad \gamma = \varphi \sin \Delta,$$

φ étant donné par l'équation

$$(56) \quad \varphi'' + 2k\varphi' + \frac{4\pi^2}{T^2} \left(\varphi + \frac{J}{g} \right) = 0.$$

Je multiplie cette équation par dt et je l'intègre de 0 à t_1 ; puis de 0 à t_2 , après l'avoir multipliée par dt . φdt ou $d\varphi$, t_1 désignant le moment où cesse l'accélération, t_2 le moment où φ et φ' ont repris la valeur zéro. J'obtiens

$$(57) \quad \int_0^{t_1} \varphi dt = \frac{kT^2 J}{2\pi^2 g} - \frac{\delta v}{g}; \quad \int_0^{t_2} \varphi dt = -\frac{\delta v}{g};$$

$$\int_0^{t_2} \varphi d\varphi + \frac{4\pi^2}{T^2} \int_0^{t_2} \varphi \left(\varphi + \frac{J}{g} \right) dt = 0; \quad 2k \int_0^{t_2} \varphi' d\varphi + \frac{4\pi^2}{T^2} \int_0^{t_2} \frac{J}{g} d\varphi = 0.$$

En remarquant que les deux intégrales $\int \varphi d\varphi'$ et $\int \varphi' d\varphi$ ont une somme nulle $\int d(\varphi\varphi')$, j'obtiens

$$(58) \quad \int_0^{t_2} \varphi \left(\varphi + \frac{J}{g} \right) dt = \frac{J^2}{g^2} \left(\frac{1}{2k} + \frac{kT^2}{2\pi^2} \right) - \frac{\delta v J}{g g}.$$

Cette intégrale multipliée par $\sin \Delta \cos \Delta$ représente le coefficient de ap . On voit que l'amortissement optimum de λ et de γ correspond à un décrement $kT = \pi$. Mais c'est surtout le dernier terme de ce coefficient qui est important, de sorte que le coefficient de ap a sensiblement la même valeur que si λ prenait immédiatement la valeur $-\frac{J}{g} \cos \Delta$, quand l'accélération s'établit, et revenait immédiatement à zéro quand l'accélération cesse. L'influence de ce terme en ap est donc à peu près inversement proportionnelle à la durée de la perturbation. Elle est d'ailleurs faible, la surcharge p étant petite.

Soit une giration; je suppose que le rayon en soit assez grand pour que

λ' et γ' puissent être considérés comme petits et pour que l'on puisse écrire

$$(59) \quad J_x = -J \cos \Delta, \quad J_y = -J \sin \Delta,$$

$$(60) \quad \lambda = -\frac{J_y}{g} = \frac{J}{g} \sin \Delta; \quad \gamma = \frac{J_x}{g} = -\frac{J}{g} \cos \Delta,$$

J désignant une constante $v\Delta'$.

L'équation (52) donne la valeur de δW ; le terme en ρ n'est pas susceptible de superposition, il oscille, sa valeur ne dépendant que de δv_x . Je suppose la giration prise rapidement, l'accélération passant de la valeur zéro à la valeur J . Pendant ce petit intervalle de temps, λ et γ rejoignent en oscillant les valeurs (60).

Le terme en ap de l'expression (52) donnant $I\Omega \delta W$ a pour coefficient

$$(61) \quad \int_0^{t_1} \frac{J^2}{g^2} \sin \Delta \cos \Delta dt = \frac{J^2}{2\Delta g^2} (\sin^2 \Delta_1 - \sin^2 \Delta_0);$$

cette expression est sinusoïdale pour une giration continue; mais, si l'on change le sens de la giration toutes les fois que $\sin \Delta$ ou $\cos \Delta$ atteint la valeur zéro (lacets définis au paragraphe 35), la valeur de cette intégrale augmente constamment entraînant une déviation systématique du compas, faible d'ailleurs ici puisque p est petit.

Les équations (32) et (33) donnent pour $\lambda + \alpha$ et β une variation représentée par un terme sinusoïdal amorti dont l'influence ne se fait sentir que pendant les premières quinze ou vingt secondes, et un terme sinusoïdal de la forme

$$(62) \quad w_1 \cos \Delta + w_2 \sin \Delta$$

pour ce qui est de $\lambda + \alpha$.

Le coefficient de $Ql + \omega b$ dans l'expression de $I\Omega \delta W$ (éq. 52) contient l'intégrale de 0 à t_2 ou, ce qui revient au même, de 0 à t_1 de l'expression (62) multipliée par $\cos \Delta dt$; on voit donc que le terme en w_2 donnera, au cours d'une giration continue, un terme oscillatoire, dont l'influence est, par suite, limitée; le terme en w_1 donne une intégrale qui croît constamment entraînant une déviation systématique. Lorsque l'accélération disparaît, un terme sinusoïdal amorti apparaît encore, dont l'influence est momentanée. Le coefficient w_1 serait petit, si la période du gyro-balistique était longue, grand, s'il y avait synchronisme entre cette période et celle de la giration, mais généralement la période de la giration sera plus longue et w_1 sera petit; l'amortissement influence alors défavorablement ce terme en w_1 .

Ce qui précède suffit à montrer que le Sperry présente un avantage incontestable sur l'Anschütz 1906, mais ne résout pas encore la question des déviations balistiques et du roulis.

49. Remarque. — Les inconvénients matériels et théoriques du pendule gyro-balistique ont été souvent signalés. Le dispositif Harrison-Rawlings (§ 56) permet d'en éviter une partie. Peut-être serait-il possible de les éviter par une autre méthode? Au lieu de stabiliser sur la verticale un appareil faisant partie de l'élément sensible, peut-être y aurait-il intérêt à stabiliser un appareil S indépendant du compas? Cet appareil donnerait ainsi la verticale à bord, par roulis. Un galet destiné à établir la liaison $U_2 U_5$ se déplacerait le long du contrepoids *en prenant appui sur lui*; son mouvement serait asservi à S de manière à maintenir le galet à la distance constante de 6 millimètres du point le plus bas du contre-poids.

Les accélérations dues aux variations du cap ou de la vitesse viendraient influencer le système S. Peut-être serait-il possible d'imaginer un deuxième système S' réagissant en sens contraire, de telle manière que la verticale vraie soit, par exemple, constamment la bissectrice des verticales accidentellement déviées?

La rose du compas Sperry est portée par le cercle asservi, ce qui lui donne un petit tremblement nuisant à la précision de la lecture. Il semble qu'il soit possible de la faire porter par le cercle vertical dont la position n'est pas affectée par ce tremblement.

50. **Modification Harrison-Rawlings (Slough). Principe**⁽⁶⁹⁾.

— La commission d'études de l'Amirauté anglaise à Slough a imaginé une modification du Sperry destinée à supprimer le gyro-balistique, à cause de ses inconvénients. En outre, le Sperry présentait l'inconvénient d'avoir une période fonction de la latitude. Or, comme on l'a vu dans l'étude des déviations balistiques (§ 48), il y a intérêt à donner à cette période une même valeur. Le contrepoids liquide utilisé dans le dispositif Slough présente l'avantage de permettre le réglage de la période, en immobilisant une partie du liquide variable avec la latitude.

Ce contrepoids du Slough est constitué par un système U_5 de deux vases communicants situés dans le vertical $\mathfrak{N}S$. Ce système est porté par le cercle asservi; il est suspendu au même axe $M_2 N_2$ que l'ancien contrepoids. Deux kilogrammes de mercure les remplissent. Un bras porté par le vase Nord vient s'appuyer sur la boîte U_2 au point où s'appuyait le galet a' de l'ancien Sperry. U_5 à vide se trouve en équilibre indifférent autour de $M_2 N_2$; le centre de gravité du mercure est assez haut pour que le contrepoids ainsi formé soit *en équilibre instable*. Si donc l'axe du gyro s'incline, le liquide se porte de ce côté, et son poids tend à exagérer le mouvement. On se rend compte facilement, par le raisonnement élémentaire du paragraphe 42, que la position habituelle du gyro est instable. Un deuxième élément d'instabilité est nécessaire⁽⁷⁰⁾; la stabilité sera rétablie, si l'on renverse le sens de la rotation du gyro.

⁽⁶⁹⁾ Voir *The Sperry Gyrocompass*, 14; *The Sperryscope*, 16, vol. 2, Nr. 12, contient quelques indications élémentaires.

⁽⁷⁰⁾ Sur la nécessité de cette seconde instabilité, voir LORD KELVIN et P. G. TAIT, 1, t. I, p. 396.

En répétant le raisonnement du paragraphe 42, on vérifiera que le décalage vers l'Est du contact $U_2 U_5$ réalise encore l'amortissement des oscillations.

Contrairement à ce qui se passait dans le cas du Sperry, le contact $U_2 U_5$ est fixe par rapport à U_2 et oscille au roulis avec U_2 ; le calcul montrera si cette circonstance présente des inconvénients.

51. Mise en équations précise. — J'applique au système les équations de Lagrange des systèmes asservis (§ 15). Le calcul fait pour le Sperry peut être utilisé en grande partie; je conserverai les expressions (6), (7), . . . (14) du paragraphe 45, supprimant les expressions (15), (16), (17); l'expression (13) désignera la force vive, dans le mouvement autour de C, du système formé par les caisses U_5 et le mercure supposé solidifié dans la position pour laquelle la hauteur de liquide est la même dans les deux caisses. Dans l'expression (14), Q désigne le poids du mercure; l , la distance de son centre de gravité à l'axe $M'_2 N'_2$, dans cette position particulière, l étant compté positivement vers le bas. Le centre de gravité de U_5 étant C, les expressions (6) à (14) contiendront tous les éléments de la force vive de U_5 . Pour le mercure, des termes complémentaires seront nécessaires, dont le calcul sera fait plus loin. Je tiendrai compte du renversement de la rotation du gyro en supposant Ω négatif.

Les notations $\alpha, \beta, \psi, \varpi, b, h, \omega, Q, l, j, u, w$ sont supprimées ou utilisées pour désigner d'autres quantités.

Je désignerai, par analogie avec le Sperry, par $\varphi + \eta$ l'inclinaison du plan de symétrie de U_5 sur le plan du cercle asservi U_4 ; quand $M_1 N_1$ est vertical, et que $\varphi + \eta$ est nul, le système U_5 — mercure est en équilibre instable, le centre de gravité du mercure est alors dans le vertical de $M'_2 N'_2$; η est, comme pour le Sperry, une constante réglable.

Je vais calculer approximativement les termes complémentaires nécessaires pour obtenir l'expression de la force vive totale du mercure. Si je laisse de côté les expressions (13) et (14) du paragraphe 45, avec la signification nouvelle que je viens de leur donner, je dois adjoindre aux expressions (6), . . . , (12) l'expression $2T_0$ de la force vive du mercure dans son mouvement autour de C et l'expression désignée au paragraphe 27 par la notation $2M (\vec{V}_0 \cdot \vec{v}_0)$.

Soit $C\mathfrak{N}\mathfrak{Z}$ le trièdre principal de U_5 ; le mercure sera contenu dans un tube en U situé dans le plan $C\mathfrak{Z}\mathfrak{N}$; soit s l'abscisse curviligne d'un point M de ce tube (fig. 7), ψ l'angle de $C\mathfrak{Z}$ avec la tangente en ce point, ω la section du tube, c'est une fonction de s dont la valeur est ω_0 dans la partie cylindrique parallèle à $C\mathfrak{Z}$. Je poserai

$$(1) \quad \omega_0 = \omega F(s);$$

$F(s)$ est une fonction supérieure à 1, d'autant plus grande que le tube est plus étroit. Je désignerai par $2h$ la distance des deux tubes cylindriques, par ϖ le poids de l'unité de volume du liquide: soit c la cote du niveau

du liquide, lorsque l'équilibre a lieu avec $C\tilde{Z}$ vertical; $c+u$ et $c-u$, les cotes des deux niveaux à l'instant t .

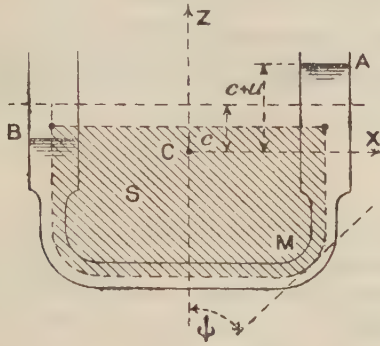


Fig. 7.

Je suppose que la force vive ait sensiblement la même valeur que si le liquide avait dans chaque section la vitesse moyenne v ; v est lié à u' par la relation

$$(2) \quad v\omega = u'\omega_0 \quad \text{ou} \quad v = F(s)u'.$$

Si p, q, r désignent les projections sur $C\tilde{X}, C\tilde{Y}, C\tilde{Z}$ de la rotation instantanée de U_5 , les composantes de la vitesse de la petite masse du liquide qui passe au point $(x, 0, z)$ du tube sont

$$(3) \quad v \sin \psi + qz, \quad rx - pz, \quad v \cos \psi - qx.$$

J'en déduis l'expression de la force vive du mouvement autour de C. Remarquant que l'on a

$$(4) \quad \sum mx = 2 \frac{\pi}{g} \omega_0 h u; \quad \sum mz = - \frac{Ql}{g} + \frac{\pi}{g} \omega_0 u^2,$$

et que l'expression (13) contient déjà une partie de la force vive cherchée, j'obtiens les termes complémentaires

$$(5) \quad \mathcal{E} u'^2 - 4 \frac{\pi}{g} \omega_0 S (\gamma' + \varphi') u',$$

en observant le degré habituel d'approximation. J'ai désigné par $\mathcal{E}$ la constante

$$(6) \quad \mathcal{E} = \frac{\pi}{g} \omega_0 \int_A F(s) ds;$$

$\mathcal{E}$ est d'autant plus grand que le tube de communication est plus étroit. S désigne l'aire comprise dans le plan $\mathcal{L}CN$ entre le tube et la droite $z = \frac{c}{g}$ (fig. 7, aire couverte de hachures).

Calculant de même l'expression $2M (\vec{V}_0 \cdot \vec{v}_c)$ [§ 27], j'obtiens, d'une part, l'expression 14 du paragraphe 45, et, d'autre part, un nouveau terme complémentaire *

$$(7) \quad -4 \frac{\varpi}{g} \omega_0 e h \gamma' u'.$$

Dans le travail virtuel des forces données, je conserve les expressions (18), (19), (20), (22), (24) du paragraphe 45, supprimant les expressions (21), (23). L'expression (18) étant supposée contenir le travail du poids apparent du mercure transporté en C, j'ai à ajouter le travail du couple dû à cette translation; utilisant les expressions (4) du présent paragraphe, qui déterminent le centre de gravité du mercure, et remarquant qu'une partie du travail de ce couple est représentée par la différentielle de l'expression (14) du paragraphe 45, il reste à adjoindre la différentielle de l'expression

$$(8) \quad 2\varpi\omega_0 h u \left(\varphi + \gamma + \eta - \frac{J_x}{g} \right) - \varpi\omega_0 u^2.$$

Les frottements intérieurs du liquide seront introduits approximativement au moyen d'un travail virtuel de la forme

$$(9) \quad -ku'\delta u,$$

ce qui peut se justifier grossièrement en remarquant que, pour de petites oscillations, il s'agit de forces à peu près proportionnelles aux vitesses.

Je remarque enfin que la relation d'asservissement (§ 45, éq. 3) subsiste sans modification; l'équation (2) qui lie φ aux autres paramètres sera remplacée par

$$(10) \quad \varphi - \theta = \rho(\xi - \zeta).$$

Cela posé, j'écris les équations de Lagrange correspondant aux paramètres λ , γ , ζ , θ , u .

Je retranche l'équation correspondant à θ de celle qui correspond à γ , et j'écris l'équation correspondant à λ , j'obtiens les équations suivantes tout à fait analogues à celles du Sperry

$$(11) \quad \mathfrak{B}\gamma'' + m\gamma' - \lambda'\Delta'(B_0 + C) - 2\frac{\varpi}{g}\omega_0 e h u'' = \Pi f \left(\frac{J_x}{g} - \gamma \right),$$

$$(12) \quad \mathfrak{A}\lambda'' + n\lambda' + \gamma'\Delta'(B_0 + C) = -(\Pi f + ap + Qb) \left(\lambda + \frac{J_r}{g} \right),$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont la même signification que dans le cas du Sperry (§ 45, éq. 25) et où A est supposé avoir également la valeur $B + B_0$, e étant relativement petit, et la période propre de l'oscillation du mercure étant lente, le terme en u'' de l'équation en γ n'a pas une bien grande importance.

Pour écrire les autres équations, j'opère comme pour le Sperry, ajoutant les équations correspondant à ζ et à θ multipliées respectivement d'abord par 1 et λ , puis par $-\lambda$ et 1. Écrivant ensuite l'équation correspondant à u , et posant, comme pour le Sperry,

$$(13) \quad V = \zeta + \chi + \theta\lambda; \quad W = -\gamma - \theta + \lambda\zeta,$$

j'obtiens les équations suivantes

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} (B_1 - A_1 + C_1)\lambda\gamma' + \left(C_1 + A_2 + \frac{ap}{g}e\right)\lambda''\gamma + \frac{ap}{g}e\lambda\gamma'' \\ + \odot V'' + \mathbf{I}\Omega W' = ap\left(\lambda\frac{J_x}{g} - \gamma\frac{J_x}{g} - \lambda\gamma\right) \\ + (\lambda - \rho)\left[Ql\left(\frac{J_x}{g} - \gamma - \theta - \eta\right) + 2\varpi\omega_0 hu\right] - \tau\zeta; \end{aligned} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} -\mathcal{B}_1 W'' + \frac{\mathcal{Q}}{g}e\gamma'' - 2\frac{\varpi}{g}\omega_0 Su'' + \mathbf{I}\Omega V' \\ = \mathcal{Q}\frac{J_x}{g} + (\mathcal{Q} + \tau)W - Ql\eta - \sigma + 2\varpi\omega_0 hu; \end{aligned} \right.$$

$$(16) \quad \mathcal{E}u'' + ku' + 2\frac{\varpi}{g}\omega_0 eh\gamma'' + 2\frac{\varpi}{g}\omega_0 SW'' = -2\varpi\omega_0\left[u + h\left(W - \eta + \frac{J_x}{g}\right)\right],$$

en posant

$$(17) \quad \odot = C_1 + C_2 + C_3; \quad \mathcal{B}_1 = B_2 + B_3 + B_5 + 2\frac{Ql}{g}e; \quad \mathcal{Q} = ap + Ql.$$

52. Équilibre et oscillation libre. — La position d'équilibre s'obtient sur ces équations; réglée pour $\theta = 0$, elle est définie par

$$(18) \quad u = h\eta; \quad \zeta = -\rho \tan L; \quad \eta(2\varpi\omega_0 h^2 - Ql) = \sigma.$$

Il y a même déviation en azimut que pour le Sperry; le correcteur de latitude et de vitesse est donc à conserver sans modification, si l'on a conservé à ρ la même valeur. On verra ci-dessous que $2\varpi\omega_0 h^2 - Ql$ doit être positif pour assurer la stabilité; comme, d'autre part, Ω est ici négatif, on voit que η a le même signe que pour le Sperry. Si cette expression avait la même valeur que l'expression Ql du Sperry, la valeur de η serait la même et l'ancien réglage de l'axe $M'_2 N'_2$ au moyen du cadran Est serait

encore valable. Il n'en est rien cependant, car les caisses à mercure sont séparées, chacune en trois compartiments, permettant, au moyen d'un robinet multiple, d'immobiliser le mercure contenu dans un ou deux de ces compartiments, ce qui revient, sans modifier Ql , à faire varier ω_0 . Le réglage de η en fonction de la latitude dépend donc de la position de ce robinet.

Les composantes verticales de l'aimantation fictive pourraient s'équilibrer par une surcharge placée sur l'axe $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ du gyro, au lieu d'utiliser une inclinaison η du contrepoids; il n'y aurait pas alors d'erreur de latitude, de sorte que l'ancien correcteur de vitesse et de latitude serait à modifier.

L'oscillation libre est définie par les équations (14), (15), (16), où l'on suppose $\lambda = \gamma \Rightarrow J = 0$, et où, par suite, $V = \zeta$, $W = -\theta$; si l'on compte ζ et u à partir des valeurs correspondant à l'équilibre, on peut supprimer les termes constants.

L'équation caractéristique est

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} &[(\mathfrak{C}r^2 + \tau)(\mathfrak{V}\mathfrak{S}_1r^2 + \mathfrak{P}) + \mathbf{I}\Omega r(\mathbf{I}\Omega r + Ql\rho)](\mathcal{E}r^2 + kr + 2\varpi\omega_0) \\ &- 4\varpi^2\omega_0^2\left(\frac{\mathfrak{S}}{g}r^2 + h\right)\left[(\mathfrak{C}r^2 + \tau)\left(\frac{\mathfrak{S}}{g}r^2 + h\right) + \mathbf{I}\Omega r\rho h\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation a six racines : $\mathbf{I}\Omega$ étant très grand en valeur absolue, deux de ces racines sont très grandes et correspondent à une nutation très rapide absorbée par les frottements; deux autres sont voisines de celles du trinôme $\mathcal{E}r^2 + kr + 2\varpi\omega_0$ et correspondent, par suite, à l'oscillation propre du liquide dans son récipient supposé fixe; les deux dernières sont voisines de zéro et donnent l'oscillation proprement dite du compas, c'est-à-dire que, dans les expressions de V et de W , les amplitudes de ces deux premières oscillations sont négligeables auprès de l'amplitude de la dernière.

J'obtiens les racines voisines de zéro en négligeant r^2 devant les quantités finies, j'obtiens l'équation approchée

$$(20) \quad \mathbf{I}^2\Omega^2r^2 - \mathbf{I}\Omega r\rho(2\varpi\omega_0h^2 - Ql) - \tau(2\varpi\omega_0h^2 - Ql - ap) = 0.$$

Ω étant négatif, cette équation donne un mouvement sinusoïdal amorti, si l'on a

$$(21) \quad 2\varpi\omega_0h^2 - Ql > ap.$$

Sa période est donnée sensiblement par

$$(22) \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\varepsilon \cos L(2\varpi\omega_0h^2 - Ql - ap)}{-\mathbf{I}\Omega};$$

son facteur d'amortissement est

$$(23) \quad \rho \frac{2\pi\omega_0 h^2 - Ql}{-2k\Omega}.$$

Pour avoir la même période que le Sperry, il faut donc donner à $2\pi\omega_0 h^2 - Ql$ une valeur dépassant légèrement (2ap) la valeur désignée précédemment par Ql , ce qui peut se faire, même avec le centre de gravité du mercure en C ($l=0$).

53. Déviations balistiques. Roulis. — De même que pour le Sperry, j'étudie d'abord l'influence du roulis. Je conserve les notations et hypothèses du paragraphe 48.

Les équations (11), (12) et (16) donnent la variation de λ , γ et u . Si le roulis est régulier, ces variations se réduisent à une oscillation forcée de la forme

$$(24) \quad \gamma = G \cos \Delta \cos(st + \varphi); \quad \lambda = L \sin \Delta \cos(st + \psi); \quad u = U \cos \Delta \cos(st + \alpha).$$

G et L sont voisins de $\frac{J_0}{g}$, U est voisin de $h\frac{J_0}{g}$, si la période d'oscillation du mercure dans son récipient maintenu fixe est beaucoup plus courte que celle du roulis, voisin de zéro. si cette période est, au contraire, longue par rapport à celle du roulis. Les différences de phase φ , ψ , α sont faibles si les amortissements sont faibles.

Je substitue ces expressions (24) dans les équations (14) et (15) (§ 51), j'en déduis, comme au paragraphe 48, la déviation permanente. Supposant les poids compensateurs réglés comme dans le cas du Sperry (§ 48, éq. 49), j'obtiens

$$(25) \quad \frac{2\tau V_0}{\sin \Delta \cos \Delta} = 2\pi\omega_0 h U L \cos(\alpha - \psi) - Q L \frac{J_0}{g} \cos \psi \\ + ap \left(G \frac{J_0}{g} \cos \varphi - L \frac{J_0}{g} \cos \psi - L G \cos(\varphi - \psi) \right);$$

$$(26) \quad W_0 = 0.$$

Si la période du mercure est très courte, U est voisin de $h\frac{J_0}{g}$, de sorte que le liquide intervient par la même expression $2\pi\omega_0 h^2 - Ql$ que dans le calcul de la période. En rapprochant de la théorie de l'Anschütz 1906, on voit que le système ne présente, dans ce cas, aucun avantage sur l'Anschütz; il se trouverait, par suite, bien inférieur au Sperry. Il est donc indispensable d'allonger la période du mercure, de manière à lui faire dépasser les valeurs habituelles de la période de houle. U peut être ainsi rendu petit; on peut même accélérer la disparition du terme en U

en agissant sur $\cos(\alpha - \psi)$, par suite, sur l'amortissement propre du liquide.

Comme je l'ai montré précédemment (§ 52), l'appareil peut être construit avec l nul (centre de gravité du mercure en C), de sorte que la déviation permanente due au roulis proviendra alors uniquement du terme en ψ et de la surcharge p . Il sera d'ailleurs facile, au moins à une latitude donnée (ω_0 donné), de disposer de la surcharge p pour compenser ces deux autres termes. Ce réglage dépendra peu de la latitude puisque le terme contenant ω_0 est petit. Il dépendra peu aussi de la période de houle qui influe sur la valeur de ψ , puisque cette valeur est petite.

Il est juste d'ajouter qu'on se trouve limité dans l'augmentation de la période propre du mercure. Je suppose, en effet, que, pour atténuer l'influence du roulis, on ait pris $Ql = ap = 0$; comme c'est l'écoulement du mercure d'un vase à l'autre qui produit la précession horizontale du compas dans le cas de l'oscillation libre, il est clair qu'on ne peut ralentir outre mesure cet écoulement. Pour un ralentissement infini, ce qui reviendrait à fermer la communication entre les deux caisses à mercure, la pesanteur n'aurait plus d'effet sur le compas, qui présenterait alors les inconvénients d'un gyroscope de Foucault. J'indiquerai plus loin une raison importante s'opposant à l'augmentation de la période propre du mercure, qui, dans le Slough, est d'environ trente secondes.

Je vais étudier les *déviation balistiques*. J'emploie la méthode du paragraphe 48. Les équations (14) et (15) multipliées par dt et intégrées depuis l'instant $t=0$ où la perturbation commence, jusqu'à l'instant t_2 où λ , γ , u et leurs dérivées premières retrouvent la valeur zéro (u et ζ étant comptés à partir de leurs valeurs d'équilibre), donnent les suivantes, si l'on tient compte du réglage des poids compensateurs,

$$(27) \quad I\Omega \delta W = ap \int_0^{t_2} \left(\lambda \frac{J_x}{g} - \gamma \frac{J_z}{g} - \lambda \gamma \right) dt + Ql \int_0^{t_2} \lambda \frac{J_x}{g} dt + 2\varpi \omega_0 h \int_0^{t_2} \lambda u dt \\ - \rho Ql \frac{\delta v_x}{g} - 2\varpi \omega_0 h \rho \int_0^{t_2} u dt;$$

$$(28) \quad I\Omega \delta V = \mathcal{P} \frac{\delta v_x}{g} + 2\varpi \omega_0 h \int_0^{t_2} u dt.$$

J'ai négligé dans la première le terme en $\eta \lambda$ dont l'intégrale aurait une très petite valeur d'après la valeur de η en fonction de σ . Les équations (27) et (28) sont entièrement analogues aux équations (52) et (53) (§ 48) relatives au Sperry, si l'on remarque que l'équation (16) multipliée par dt et intégrée de 0 à t_2 donne

$$(29) \quad \int_0^{t_2} u dt = -h \frac{\delta v_x}{g},$$

et si l'on remplace λ par sa valeur approchée $-\frac{J_1}{g}$, γ par $\frac{J_1}{g}$; u joue le rôle de $\lambda + \alpha$. Une différence essentielle consiste en ce que une partie du poids actif, de moment $-2\varpi\omega_0 h^2$, intervient avec le coefficient $\int_0^{t_2} \frac{J_1}{g} \frac{u}{h} dt$, l'autre, de moment $\alpha P + Ql$, avec le coefficient $\int_0^{t_2} \frac{J_1}{g^2} dt$.

L'équation (28), où l'on tient compte de l'équation (29), s'écrit

$$(30) \quad I\Omega \delta V = (P - 2\varpi\omega_0 h^2) \frac{\delta v_x}{g}.$$

Cette déviation amène le compas dans sa nouvelle position d'équilibre, si la période est celle du pendule ayant pour longueur le rayon de la terre. Mais, *contrairement à ce qui se passe pour le Sperry*, ce résultat n'est atteint qu'à l'instant t_2 , c'est-à-dire quelque temps après la fin de la perturbation. La période propre du mercure étant assez longue, *u quitte lentement la valeur zéro*, de sorte que l'intégrale $\int u dt$ n'arrive à sa valeur finale qu'avec un certain retard : *V obéit paresseusement à cette influence, mais il finit par y obéir intégralement*. J'ai signalé au paragraphe précédent le dispositif qui permet d'immobiliser une partie du mercure : on peut ainsi adapter la période du compas à la latitude en la maintenant voisine de cette période optimum. C'est un avantage important du Slough.

L'équation (28) donne la déviation δW qui, si elle est importante, est susceptible d'entraîner ultérieurement une déviation en azimut. Cette expression de δW contient un terme en ρ , dû à l'amortissement, dont l'expression a même forme que pour le Sperry et l'Anschütz :

$$\rho (2\varpi\omega_0 h^2 - Ql) \frac{\delta v_x}{g}.$$

L'influence de l'amortissement est la même que pour ces deux compas, si on l'exprime en fonction du facteur d'amortissement (§ 52, éq. 23); il y a lieu cependant de noter *le retard avec lequel cette déviation se produit*.

Répétant le raisonnement fait dans le cas d'une variation de vitesse à cap constant (§ 48), on voit que les termes en αp et Ql ont sensiblement le même coefficient; si l est négatif, on peut annuler ces termes par un choix convenable de p . Le troisième terme est une fraction inférieure à l'unité (§ 48, fig. 6) de ce que l'on obtiendrait s'il s'agissait d'un Anschütz dont le poids aurait $2\varpi\omega_0 h^2$ pour moment, fraction d'autant plus voisine de l'unité que la période du mercure est plus longue et que son amortissement est plus grand. Ce résultat est d'ailleurs beaucoup plus accusé que dans le Sperry, la période du mercure étant plus longue que celle du gyrobalistique. Cette propriété montre nettement la supériorité, à ce point de vue, du Slough sur l'Anschütz, elle montre dans quelle proportion l'incon-

vénient produit par le fait que le contact n'est pas stabilisé sur la verticale est atténué par la nature spéciale du contrepoids.

On vient de voir les avantages qu'il y a à augmenter la période de l'amortissement du mercure, mais il ne faut pas perdre de vue qu'en même temps que cette période augmente, l'intervalle (t_1, t_2) nécessaire au retour de λ, γ, u à l'équilibre augmente, et que les termes négligés peuvent alors prendre quelque importance. S'il s'agit d'une giration, les conclusions sont les mêmes que pour le Sperry, avec cette différence que c'est le terme en $\sin \Delta$ de l'expression de u qui produit une déviation systématique au cours d'une giration continuë. La période du mercure étant plus longue, on se trouvera un peu moins éloigné des conditions défavorables de synchronisme. Ces conditions ne pourraient d'ailleurs se réaliser que par des évolutions de faible rayon à petite allure. On voit ainsi une des raisons qui rendent impossible l'augmentation de la période du mercure, qui doit se trouver comprise entre les périodes habituelles de la houle et les périodes possibles des girations.

CHAPITRE V.

ÉTUDE DU COMPAS SPERRY À DEUX GYROS

(TWIN-GYRO 1918).

54. **Description** (voir note 15, p. 7). — Le dispositif ingénieux adopté dans le twin-gyro a pour but d'atténuer l'action des accélérations horizontales. Les deux gyros sont reliés par un lien élastique et par un mécanisme d'asservissement; ce mécanisme sert à produire l'amortissement en absorbant automatiquement l'énergie apparente, et même à assurer le caractère oscillatoire des mouvements dans le voisinage d'une position d'équilibre, qui, sans lui, serait instable.

Dans la description qui suit, j'indiquerai comme directions des axes d'articulation celles qui correspondent à la position d'équilibre.

Le twin-gyro comporte un anneau de Cardan U_0 et un croisillon U identiques à ceux du single-gyro (fig. 8). Un châssis principal (frame) U_1 est mobile, par rapport à U , autour de la verticale M_1N_1 du point fixe O de la Cardan. A une certaine distance l vers l'Ouest est articulé, suivant l'axe vertical M_2N_2 , un système $U_2U_3U_4$ (cercle vertical, boîte, gyro) entièrement analogue au système cercle vertical, boîte, gyro du single-gyro. Le centre de gravité du système U_3U_4 est à la distance a au-dessous de l'axe horizontal M_3N_3 de l'articulation (U_2U_3). A la même distance l vers l'Est, est articulé de même un système $U'_2U'_3U'_4$ identique au précédent, sauf les différences suivantes :

- 1° Le centre de gravité du système $U_3U'_1$ est à la distance $2a$ de l'axe M_3N_3 ;
- 2° Les deux gyros tournent à la même vitesse dans des sens opposés : ils sont supraconvergens. Le vecteur rotation du gyro Ouest est dirigé vers le Nord ; le vecteur rotation du gyro Est est dirigé vers le Sud.

Je désignerai par e la distance du point O à l'horizontale qui joint les points d'articulation CC' des deux gyros.

Le cercle vertical Ouest U_2 peut tourner librement autour de M_2N_2 ; le cercle vertical Est U'_2 est suspendu à U_1 par un fil de torsion disposé le long de M_2N_2 , qui le rappelle constamment vers la position relative qu'il a lorsqu'il y a équilibre, c'est-à-dire celle pour laquelle les trois axes verticaux M_1N_1 , M_2N_2 , $M'_2N'_2$ sont dans le plan du cercle.

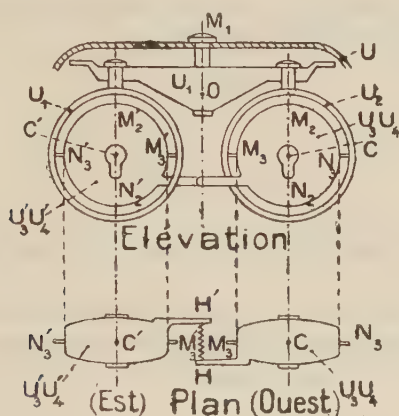


Fig. 8.

La boîte U_3 porte un bras d'extrémité H , la boîte U'_3 porte un bras d'extrémité H' ; un ressort faible HH' relie ces deux bras. Dans la position d'équilibre, HH' est porté par une horizontale Nord-Sud, située à la distance c au-dessous des centres d'articulation C, C' des deux gyros ; H (Ouest) est à la distance b du plan vertical OCC' vers le Nord, H' (Est) est à la même distance b vers le Sud.

Un moteur d'asservissement fixé au croisillon agit sur le châssis principal de telle manière que le plan du cercle vertical (Ouest) soit constamment confondu avec le plan OCC' .

En d'autres termes, le châssis principal suit automatiquement le cercle U_2 dans ses mouvements, en prenant appui sur le croisillon.

55. Mise en équations précise. — J'utiliserai les équations de M. Appell étendues aux systèmes asservis (§ 18).

Je conserve la signification des paramètres $\Delta, \mu, \nu, \chi, \lambda, \gamma$ (§ 45). Le trièdre auxiliaire $OX''Y''Z''$ (§ 45) tournant de l'angle ξ autour de l'axe M_1N_1 (ou OZ'') donne le trièdre principal du châssis U_1 ; tournant de

l'angle ζ autour de ce même axe, il donne en direction le trièdre principal du cercle vertical U_2 (Ouest). Ce trièdre principal tournant de l'angle α autour de l'axe M_3N_3 (ou C^2N) donne le trièdre principal de la boîte U_3 . Je définis de même le cercle vertical et la boîte du gyro Est par les angles θ, β analogues à ζ et α .

La position du compas dépend des paramètres $\lambda, \gamma, \xi, \zeta, \theta, \alpha, \beta$, sans compter les angles de rotation propre des deux gyros. Δ est une fonction connue de t , constante si le navire conserve son cap.

La liaison d'asservissement est représentée par l'équation

$$(1) \quad \xi - \zeta = 0.$$

Les déplacements virtuels annulant le travail des forces de liaison de deuxième espèce doivent vérifier la condition

$$(2) \quad \delta(\xi - \Delta) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta\xi = 0,$$

puisque Δ , fonction donnée de t , doit rester fixe dans tout déplacement virtuel.

Le mouvement sera défini par l'équation d'asservissement (1), jointe aux équations de M. Appell correspondant aux paramètres $\lambda, \gamma, \zeta, \theta, \alpha, \beta$.

J'observerai le même degré d'approximation que précédemment; je poserai

$$(3) \quad \begin{cases} V_1 = \chi + \zeta + \alpha\lambda; & V_2 = \chi + \theta + \beta\lambda; \\ W_1 = -\gamma - \alpha + \lambda\zeta; & W_2 = -\gamma - \beta + \lambda\theta, \end{cases}$$

quantités qui représentent les composantes, suivant OY et suivant OZ, des vecteurs unitaires portés par les axes des deux gyros. Leurs produits, ou — ce qui revient au même — les produits de $\zeta, \theta, \gamma + \alpha, \gamma + \beta$ par J, λ, γ seront négligés.

N'écrivant dans l'énergie d'accélération S que ce qui est susceptible de donner, dans les équations du mouvement, des termes de l'ordre de grandeur que j'ai convenu de conserver, et utilisant, d'autre part, les indications de la note 27 et des paragraphes 27 et 28, j'obtiens pour la fonction 2S de l'anneau de Cardan, l'expression

$$(4) \quad B^0\mu''^2 + \dots;$$

pour la fonction 2S du croisillon, l'expression

$$(5) \quad A(\nu' - \Delta'\mu)^2 + B(\mu' + \Delta'\nu)^2 + 2(C - B)\Delta'\mu'\nu'' + 2(A - C)\Delta'\nu'\mu'' + \dots;$$

pour la fonction $2S$ du système formé par le châssis U_1 , y compris les masses des cercles verticaux $U_2 U'_2$ concentrées en leurs centres de gravité (sur $M_2 N_2$ et $M'_2 N'_2$) et, d'autre part, les masses des gyros $U_3 U'_4$ et $U'_3 U_4$ concentrées en leurs centres d'articulation respectifs C et C' , j'obtiens l'expression

$$(6) \quad A_1 \lambda''^2 + B_1 \gamma''^2 + \dots$$

Je dois y ajouter

1° La fonction $2S$ correspondant au mouvement de chaque cercle vertical autour de son centre de gravité, soit

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_2 \lambda''^2 + B_2 \gamma''^2 + C_2 (\zeta' + \chi' - \lambda \gamma')^2 + 2(B_2 - A_2) \lambda' \gamma' \zeta'' + \dots \\ & + A'_2 \lambda''^2 + B'_2 \gamma''^2 + C'_2 (\theta' + \chi' - \lambda \gamma')^2 + 2(B'_2 - A'_2) \lambda' \gamma' \theta'' + \dots \end{aligned} \right.$$

2° La fonction $2S$ correspondant au mouvement du gyro Ouest ($U_3 U_4$) autour de C , soit (§ 28, éq. 3 et 4)

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & A_3 (\lambda'' - \alpha \zeta'')^2 + (B_3 + B_4) (\alpha'' + \gamma'')^2 + (C_3 + B_4) (\zeta' + \chi' - \lambda \gamma' + \alpha \lambda')^2 + \dots \\ & + 2I\Omega [(\zeta' + \chi' - \lambda \gamma' + \alpha \lambda') (\alpha'' + \gamma'' - \lambda'' \zeta) \\ & - (\zeta' + \chi' - \lambda \gamma' + \alpha \lambda') (\alpha' + \gamma' - \lambda' \zeta)] + \dots \end{aligned} \right.$$

3° L'expression $2M(\vec{J}_0, \vec{j}_0)$ (§ 27) relative au gyro Ouest, soit

$$(9) \quad 2 \frac{ap}{g} [l(\alpha'' + \gamma'') (\xi + \chi - \lambda \gamma)'' + e(\gamma''^2 + \alpha'' \gamma'' + \lambda''^2 - \lambda'' \alpha \zeta'')] + \dots,$$

qu'on calcule facilement à l'aide de la note 27.

4°, 5° Les expressions analogues relatives au gyro Est, soit

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & A'_3 (\lambda'' - \beta \theta'')^2 + (B'_3 + B'_4) (\beta'' + \gamma'')^2 + (C'_3 + B'_4) (\theta' + \chi' - \lambda \gamma' + \beta \lambda')^2 + \dots \\ & - 2I\Omega [(\theta' + \chi' - \lambda \gamma' + \beta \lambda') (\beta'' + \gamma'' - \lambda'' \theta) \\ & - (\theta' + \chi' - \lambda \gamma' + \beta \lambda') (\beta' + \gamma' - \lambda' \theta)] + \dots \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad + 4 \frac{ap}{g} [-l(\beta'' + \gamma'') (\xi + \chi - \lambda \gamma)'' + e(\gamma''^2 + \beta'' \gamma'' + \lambda''^2 - \lambda'' \beta \theta'')] + \dots$$

J'évalue le travail virtuel de la pesanteur apparente, en supposant les poids apparents des deux gyros transportés respectivement en C et C' ; Π désignant le poids total, f la distance du point O au centre de gravité

du système (compte tenu de ce transport de masses), ce travail est la différentielle de l'expression

$$(12) \quad \dots - \Pi f \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} \right) + \Pi f \frac{J_z}{g} \gamma - \Pi f \frac{J_z}{g} \lambda.$$

Le travail des couples introduits par cette translation est la différentielle de l'expression

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} ap \left[\frac{J_z}{g} (\alpha + \gamma) + \frac{J_z}{g} (\alpha \zeta - \lambda) - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{(\alpha + \gamma)^2}{2} + \lambda \alpha \zeta \right] \\ + 2ap \left[\frac{J_z}{g} (\beta + \gamma) + \frac{J_z}{g} (\beta \theta - \lambda) - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{(\beta + \gamma)^2}{2} + \lambda \beta \theta \right]. \end{array} \right.$$

Le travail de l'aimantation fictive des deux gyros est la différentielle de l'expression

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} - I \Omega \varepsilon \cos L \left[\frac{(\alpha + \gamma)^2}{2} + \frac{\zeta^2}{2} \right] + I \Omega \varepsilon \sin L (\lambda \zeta - \alpha - \gamma) \\ + I \Omega \varepsilon \cos L \left[\frac{(\beta + \gamma)^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} \right] - I \Omega \varepsilon \sin L (\lambda \theta - \beta - \gamma). \end{array} \right.$$

Le travail des forces intérieures du fil de torsion supportant le gyro Est est de la forme

$$(15) \quad - [M(\theta - \xi) + N] \delta \theta.$$

Le travail des résistances passives s'opposant à la variation de λ et de γ peut se mettre sous la forme

$$(16) \quad - m \gamma' \delta \gamma - n \lambda' \delta \lambda.$$

Les forces intérieures du ressort ont le travail

$$- T \delta d$$

(T tension; d longueur du ressort). La tension étant très petite, on peut se borner aux termes du premier ordre de d . La tension elle-même T sera considérée comme proportionnelle à l'allongement du ressort, de sorte que, si T_0 désigne la valeur de T pour $d = 2b$, c'est-à-dire pour $\xi = \theta = \zeta$, $\alpha = \beta = 0$, ce travail est

$$(17) \quad - [T_0 + kl(\xi + \theta - 2\zeta) + kc(\beta - \alpha)] [l(\delta \xi - \delta \theta) + c(\delta \beta - \delta \alpha)].$$

Enfin je suppose une surcharge de poids g placée sur le pôle Nord de chaque gyro, à la distance b du centre C ou C' d'articulation, j'ai ainsi à

ajouter le travail de son poids apparent dans le mouvement autour de chacun de ces deux points, soit la différentielle de

$$(18) \quad bq \frac{J}{g} (\theta - \zeta) + bq (\alpha - \beta + \lambda \theta - \lambda \zeta).$$

56. **Équilibre du compas.** — La position d'équilibre du compas s'obtient (§ 14) en annulant le travail virtuel des forces données dans tout déplacement laissant ξ constant, J , λ , γ étant supposés nuls.

En désignant, comme précédemment, $l\Omega\varepsilon \cos L$ par τ et $l\Omega\varepsilon \sin L$ par σ , et négligeant τ devant ap , j'obtiens les équations d'équilibre

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau \zeta + lT = 0, \\ -ap\alpha + bq - \sigma + cT = 0, \\ (\tau - M)\theta + M\zeta - N - lT = 0, \\ -2ap\beta + \sigma - bq - cT = 0. \end{array} \right.$$

Or, le compas porte sur la suspension du gyro Est un *correcteur de latitude* qui, tordant plus ou moins le fil supportant ce gyro, donne à N la valeur nécessaire pour supprimer toute erreur ($\zeta = 0$); les conditions d'équilibre exigent donc que la tension T soit nulle, elles deviennent

$$(20) \quad \alpha = -2\beta = \frac{bq - \sigma}{ap};$$

$$(21) \quad N = (\tau - M)\theta = (\tau - M) \left(\frac{3c}{2l} \frac{bq - \sigma}{ap} - \frac{T_0}{kl} \right).$$

Les équations (20) montrent que les axes des deux gyros ont des inclinaisons de sens opposés, le gyro Ouest étant deux fois plus incliné. L'équation (21) donne la loi de graduation du correcteur de latitude.

On verra plus loin que la stabilité exige que M soit nettement plus grand que τ ; dans le twin-gyro, il lui est bien supérieur. Si donc T_0 est assez voisin de zéro, on peut négliger τ devant M , de sorte que la variation de N en fonction de la latitude est due entièrement au terme en σ qui contient le facteur c . Toute variation cesse, et la correction de latitude devient inutile, si c est nul. Or, je montrerai que c'est c qui cause l'amortissement, la correction de latitude est donc, comme dans les compas précédents, due au système amortisseur. Si cependant $\frac{T_0}{kc}$ et $\frac{M}{ap}$ étaient du même ordre de grandeur, la variation serait due aussi à un terme en τ indépendant de c ⁽⁷¹⁾.

(71) Il n'est pas question ici de la correction, fonction de la latitude, due à la vitesse du bâtiment. Cette correction indiquée au paragraphe 30 pour tous les compas se fait en déplaçant la ligne de foi d'une quantité déterminée par la lecture d'un abaque à deux graduations (vitesse et latitude).

La position d'équilibre dépendant essentiellement des valeurs de N, T_0, M, k , on conçoit que le réglage du compas soit très délicat : la configuration du fil correspondant à une torsion nulle, celle du ressort pour une tension nulle, varient plus ou moins avec le temps suivant les efforts auxquels ce fil et ce ressort ont été soumis ; leur élasticité peut varier aussi. La fatigue du fil due au poids du gyro Est est une cause importante de variation ; le ressort peut accidentellement, à la mise en marche, par exemple, être soumis à un allongement exagéré. C'est là un défaut capital du compas. Peut-être serait-il possible d'adopter un autre mode de suspension du gyro Est et de remplacer le fil de torsion par un ressort spiral ?

57. Oscillation libre⁽⁷²⁾. — Supposant J, λ, γ nuls, j'écris les équations de M. Appell correspondant aux quatre paramètres $\zeta, \theta, \alpha, \beta$; si, dans ces équations, je compte $\zeta, \theta, \alpha, \beta$ à partir des valeurs déterminées ci-dessus (§ 56) qui correspondent à l'équilibre, les termes constants disparaissent et j'obtiens

$$(22) \quad \begin{cases} (C_2 + C_3 + B_4)\zeta'' - I\Omega\alpha' = -\tau\zeta - kl^2(\theta - \zeta) - klc(\beta - \alpha), \\ (C_2' + C_3' + B_4')\theta'' + I\Omega\beta' = \tau\theta - (M + kl^2)(\theta - \zeta) - klc(\beta - \alpha), \\ (B_3 + B_4)\alpha'' + \frac{ap}{g}\zeta'' + I\Omega\zeta' = -(ap + \tau)\alpha + klc(\theta - \zeta) + kc^2(\beta - \alpha), \\ (B_3' + B_4')\beta'' - 2\frac{ap}{g}l\theta'' - I\Omega\theta' = (-2ap + \tau)\beta - klc(\theta - \zeta) - kc^2(\beta - \alpha). \end{cases}$$

Je suppose qu'il y ait prédominance gyrostatique, c'est-à-dire que les termes des premiers membres contenant le facteur $I\Omega$ soient seuls à retenir ; cette hypothèse est tout à fait légitime, les seules masses non gyrostatiques intervenant dans la question étant celles des éléments sensibles Est et Ouest. L'équation caractéristique s'obtient en égalant à zéro un déterminant du 4^e ordre, c'est une équation du 4^e degré. Je poserai

$$(23) \quad I\Omega r = u\sqrt{ap}.$$

1^{re} cas. $c = 0$. — Je suppose c nul, l'équation caractéristique s'écrit

$$(24) \quad f(u^2) = u^4 + u^2(2M + kl^2 - \tau) + 2\tau(M + 2kl^2 - \tau) = 0.$$

J'utilise, pour la discussion, le point m de coordonnées cartésiennes (fig. 9)

$$(25) \quad x = kl^2; \quad y = M.$$

⁽⁷²⁾ J'ai donné (H. BEGHIN, 2) les équations ci-dessous ; voir J. PELUCHON, 1.

La stabilité exige que la partie réelle de chacune des quatre racines de l'équation (24) soit négative ou nulle. L'équation en u^2 doit donc avoir ses deux racines négatives, c'est-à-dire que le point m doit être extérieur à la parabole (P)

$$(26) \quad (2y + x - \tau)^2 - 8\tau(y + 2x - \tau) = 0,$$

au-dessus de la tangente (D)

$$(28) \quad y + 2x - \tau = 0,$$

et du diamètre correspondant (Δ)

$$(29) \quad 2y + x - \tau = 0,$$

donc dans l'une des régions I, II ou III. Je montrerai plus loin que les régions I et II sont inacceptables.

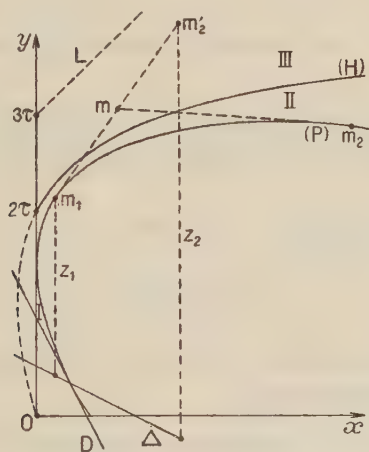


Fig. 9.

Le mouvement d'un compas remplissant cette condition est la superposition de deux mouvements sinusoïdaux non amortis. Je vais en chercher les périodes :

L'équation (24) où l'on voit dans u^2 un paramètre arbitraire, et où l'on remplace kl^2 par x et M par y , représente la famille des tangentes à la parabole (P). Par le point donné m du plan passent deux de ces tangentes : soient u_1^2 et u_2^2 les valeurs du paramètre qui leur correspondent, $m_1(x_1, y_1)$ et $m_2(x_2, y_2)$ les points de contact. On a évidemment

$$(29) \quad u_1^2 = -\frac{2y_1 + x_1 - \tau}{2} = -z_1, \quad u_2^2 = -\frac{2y_2 + x_2 - \tau}{2} = -z_2,$$

si z_1 et z_2 désignent les distances de m_1 et de m_2 au diamètre Δ , comptées parallèlement à Oy ⁽⁷³⁾; les périodes des deux oscillations sont, d'après l'équation (23),

$$(30) \quad 2\pi \frac{I\Omega}{\sqrt{apz_1}} \quad \text{et} \quad 2\pi \frac{I\Omega}{\sqrt{apz_2}}.$$

Lorsque le point m se meut dans la région II, III, ces deux périodes restent inférieures à la valeur $2\pi \frac{I\Omega}{\sqrt{ap\tau}}$, qui correspond à la position m_0 du point m .

C'est la période qu'aurait le gyro Ouest s'il pouvait osciller librement.

Si le point m est près de la parabole, les deux périodes sont voisines, l'oscillation présentant par suite des battements très accentués; si — ce qui est réalisé dans le twin-gyro — M est grand par rapport à τ , les deux périodes sont très différentes; la courte s'obtient approximativement en prenant pour z_2 la somme $z_1 + z_2 = 2y + x - \tau$, ou simplement $2y + x$; la période longue s'obtient en déterminant z_1 par le produit $z_1 z_2$, soit, à peu près,

$$(31) \quad z_2 = 2y + x, \quad z_1 = 2\tau \frac{y + 2x}{2y + x}.$$

z_1 étant compris entre τ (x petit) et 4τ (x grand), on obtient la période longue en multipliant la période du gyro Ouest par un nombre compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

2^e cas. $c \neq 0$. — Je pose

$$(32) \quad klc = \gamma \sqrt{ap}.$$

Si je néglige le terme en c^2 , ce qui revient à négliger $3kc^2$ devant $2ap$, l'équation caractéristique s'écrit

$$(33) \quad u^4 + u^2(2y + x - \tau) + 2\tau(y + 2x - \tau) + \gamma u(2u^2 + 3y - 4\tau) = 0.$$

Si γ est assez petit, deux des racines sont voisines de $\pm i\sqrt{z_1}$, les deux autres sont voisines de $\pm i\sqrt{z_2}$.

La stabilité exige que la partie réelle de chacune d'elles soit négative. Le lieu des points $m(x, y)$ pour lesquels la partie réelle de l'une des racines s'annule s'obtient en exprimant que cette équation a une solution commune avec sa transformée en $-u$ ou, ce qui revient au même, en exprimant que l'équation (24) et l'équation

$$(34) \quad u(2u^2 + 3y - 4\tau) = 0$$

⁽⁷³⁾ En portant $mm'_2 = mm_1$ (fig. 9), z_2 représente la distance de m'_2 à Δ comptée parallèlement à Oy .

ont une solution commune. Ce lieu comprend la droite (D) (éq. 27), et l'hyperbole (H)

$$\frac{4}{3}f\left(\frac{4\tau - 3y}{2}\right) = y(2\tau - y) + 2x(4\tau - y) = 0,$$

bitangente à la parabole (P) aux points (imaginaires) situés sur la droite (L)

$$(35) \quad 4\tau - 3y = -(2y + x - \tau), \quad \text{ou} \quad x - y + 3\tau = 0.$$

Je vais établir que la condition de stabilité est que le point m soit au-dessus de la partie utile ($x > 0, y > 0$) de cette hyperbole : soit, en effet, m un point de cette branche. Comme ce point est au-dessous de la droite (L), deux racines de l'équation (33) sont égales à $\pm i\sqrt{z_1}$; les deux autres, voisines de $\pm i\sqrt{z_2}$, ont pour partie réelle $-\gamma$, puisque la somme des quatre racines est -2γ (l'oscillation de période courte est seule amortie). Je déplace le point m de dy parallèlement à Oy , et, différentiant l'équation (33), j'obtiens pour la partie réelle de l'accroissement de l'une des deux racines voisines de $\pm i\sqrt{z_1}$, une quantité du signe de dy ($4\tau - 3y$) ($x + y - \tau$) donc du signe de $-dy$; il en résulte que, en tous les points de la région III immédiatement au-dessus de l'hyperbole (fig. 9), les parties réelles des quatre racines sont négatives et le mouvement est stable; il en est ainsi tant que m ne traverse pas l'hyperbole (H) ou la droite (D), donc dans toute la région III.

Au-dessous de l'hyperbole, deux parties réelles deviennent positives, et le mouvement est instable. Il en est ainsi tant qu'on ne traverse pas (D); les régions I et II sont donc inacceptables.

L'instabilité subsiste quand on traverse la droite (D), l'une seulement des parties réelles changeant de signe. La stabilité n'existe donc que dans la région III.

Pour une position donnée du point m dans cette région, on a une valeur approchée des racines en les développant sous la forme $u_1 + \gamma v_1$, j'obtiens ainsi, en posant

$$(36) \quad z_3 = \frac{3y - 4\tau}{2},$$

les quatre racines

$$(37) \quad \pm i\sqrt{z_1} + \gamma \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_1}; \quad \pm i\sqrt{z_2} + \gamma \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_2},$$

mettant en évidence la valeur des deux facteurs d'amortissement. On voit que la modification de la période est de l'ordre de γ^2 .

Les facteurs d'amortissement sont différents pour les deux oscillations : ils sont égaux si $z_1 + z_2 - 2z_3$ est nul, c'est-à-dire si le point m se trouve

sur la droite (L). Au-dessus de cette droite, c'est le facteur d'amortissement de la période longue qui est le plus grand; au-dessous, c'est l'inverse qui a lieu.

Si y est grand par rapport à τ , les deux facteurs d'amortissement ont sensiblement les valeurs

$$(38) \quad \gamma \frac{3y}{2(2y+x)} \quad \text{et} \quad \gamma \frac{y+2x}{2(2y+x)}; \quad (39)$$

celui de l'oscillation longue est compris entre $\frac{3}{4}\gamma$ (x petit) et θ (x grand); celui de l'oscillation courte est compris entre $\frac{1}{4}\gamma$ et γ .

La latitude influe peu sur les amortissements; elle influe peu sur la période courte, si y est grand (expressions 31); la période longue est à peu près proportionnelle à $(\cos L)^{-\frac{1}{2}}$. On obtient plus de précision en différentiant l'équation (24) avec x et y constants : posant $u^2 = -z$, j'obtiens

$$(40) \quad dz(2z - z_1 - z_2) + d\tau(z + 2y + 4x - 4\tau) = 0;$$

on voit ainsi que, lorsqu'on s'élève en latitude, la période courte diminue, insensiblement d'ailleurs.

58. Calcul des amplitudes. — Je vais indiquer rapidement le calcul des amplitudes dans le cas d'un amortissement négligeable ($c=0$). Il est commode de revenir aux expressions réelles : la forme particulière des équations (22) dans l'hypothèse d'une prédominance gyrostatique montre que, pour chacune des deux oscillations principales, ζ et θ varient en phase, α et β en quadrature avec ζ et θ . On cherchera des solutions de la forme

$$(41) \quad \begin{cases} \zeta = Z \cos(\rho t + \varphi); & \theta = \Theta \cos(\rho t + \varphi); \\ \alpha = A \sin(\rho t + \varphi); & \beta = B \sin(\rho t + \varphi). \end{cases}$$

En posant

$$(42) \quad I\Omega\rho = v\sqrt{ap},$$

on obtiendra une équation caractéristique, transformée en $v^2 = -u^2$ de l'équation (24). Elle s'écrit sous forme de déterminant :

$$(43) \quad \begin{vmatrix} \tau - x & x & -v\sqrt{ap} & 0 \\ -y - x & y + x - \tau & 0 & v\sqrt{ap} \\ -v\sqrt{ap} & 0 & ap & 0 \\ 0 & v\sqrt{ap} & 0 & 2ap \end{vmatrix} = 0.$$

Z , Θ , A , B sont proportionnels aux mineurs d'une même ligne, la deuxième par exemple, affectés de signes alternés; j'obtiens ainsi, h_1 et h_2 désignant deux arbitraires, les coefficients suivants des deux oscillations principales :

$$(44) \quad \begin{cases} Z_1 = 2h_1\sqrt{ap} x \\ \Theta_1 = 2h_1\sqrt{ap}(x - \tau + v_1^2) \\ A_1 = 2h_1v_1x \\ B_1 = -h_1v_1(x - \tau + v_1^2) \end{cases} \quad \begin{cases} Z_2 = 2h_2\sqrt{ap} x \\ \Theta_2 = 2h_2\sqrt{ap}(x - \tau + v_2^2) \\ A_2 = 2h_2v_2x \\ B_2 = -h_2v_2(x - \tau + v_2^2) \end{cases}$$

Les constantes h_1 , h_2 , φ_1 , φ_2 correspondant aux conditions initiales ζ_0 , θ_0 , α_0 , β_0 seront définies par

$$(45) \quad \begin{cases} \zeta_0 = 2x\sqrt{ap}(h_1 \cos \varphi_1 + h_2 \cos \varphi_2) \\ \theta_0 - \zeta_0 = 2\sqrt{ap}[h_1 \cos \varphi_1(v_1^2 - \tau) + h_2 \cos \varphi_2(v_2^2 - \tau)] \\ \alpha_0 = 2x(v_1h_1 \sin \varphi_1 + v_2h_2 \sin \varphi_2) \\ \alpha_0 + 2\beta_0 = -2[v_1h_1 \sin \varphi_1(v_1^2 - \tau) + v_2h_2 \sin \varphi_2(v_2^2 - \tau)]. \end{cases}$$

Ces deux groupes d'équations mettent en évidence que, si v_2^2 est grand par rapport à v_1^2 et à τ , les valeurs de $\theta_0 - \zeta_0$ et de $\alpha_0 + 2\beta_0$ interviennent presque exclusivement dans la détermination de h_2 et de φ_2 , tandis que les valeurs de ζ_0 et de α_0 déterminent h_1 et φ_1 ; et, par réciprocity, l'oscillation de courte période se fait surtout sentir sur $\theta - \zeta$ et sur $\alpha + 2\beta$, l'autre sur ζ et sur α . C'est donc, dans ce cas, surtout l'oscillation longue qui importe pour les indications du compas⁽⁷⁴⁾.

⁽⁷⁴⁾ La notice du twin-gyro indique que le rendement de l'appareil est 100 p. 100, et que le couple directeur est la somme des couples correspondant aux deux gyrostats. Cette remarque est très obscure: on peut comparer la période prépondérante, c'est-à-dire la période longue, à celle que l'on obtiendrait en disposant les deux gyrostats dans le même sens sur une même charpente, avec la somme $3ap$ des deux moments de pesanteur pour les faire mouvoir en azimut, et la somme $2I\Omega \varepsilon \cos L$ des deux couples d'aimantation fictive pour les faire varier en inclinaison. La période serait

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2\pi}{\sqrt{ap \varepsilon \cos L}} \sqrt{\frac{I\Omega}{ap \varepsilon \cos L}}.$$

Cette période correspondrait à $2v_1^2 = 3\tau$; il est facile de réaliser cette condition en plaçant le point m sur la droite

$$4y - 10x - 7\tau = 0;$$

on peut d'ailleurs réaliser aussi des périodes plus longues, ou plus courtes avec, pour maximum de durée, celle qui correspond au gyro ouest seul ($v_1^2 = \tau$) et pour minimum la moitié de cette valeur ($v_1^2 = 4\tau$).

59. **Déviations balistiques. Roulis** ⁽⁷⁵⁾. — Utilisant les calculs du paragraphe 55, j'écris l'équation en $\frac{\partial S}{\partial \gamma''}$ en retranchant les équations en $\frac{\partial S}{\partial \alpha''}$ et en $\frac{\partial S}{\partial \beta''}$; j'écris de même l'équation en $\frac{\partial S}{\partial \lambda''}$. Je poserai

$$(46) \quad \mathfrak{B} = B_0 + B_1 + B_2 + B'_2;$$

$$(47) \quad \mathfrak{A} = A + A_1 + A_2 + A'_2 + A_3 + A'_3 + 6 \frac{ap}{g} e,$$

puis supposant, comme pour le single-gyro, que l'appareil vérifie la condition $A = B + B_0$, et négligeant les termes en $(\zeta - \theta)$ ($\sigma - bq$), $\alpha'' + \gamma''$ et $\beta'' + \gamma''$, j'obtiens les deux équations

$$(48) \quad \mathfrak{B} \gamma'' + m \gamma' - (B_0 + C) \Delta' \lambda' = -\Pi f \left(\gamma - \frac{J_z}{g} \right),$$

$$(49) \quad \mathfrak{A} \lambda'' + n \lambda' + (B_0 + C) \Delta' \gamma' = -\Pi f \left(\lambda + \frac{J_z}{g} \right),$$

identiques aux équations en λ et γ du single-gyro.

Pour écrire les autres équations, je forme les combinaisons

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta''} + \lambda \frac{\partial S}{\partial \alpha''}, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta''} + \lambda \frac{\partial S}{\partial \beta''},$$

et j'écris les équations en $\frac{\partial S}{\partial \alpha''}$ et en $\frac{\partial S}{\partial \beta''}$, j'obtiens (voir § 55, éq. 3)

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{I} \Omega W'_1 + (C_2 + C_3 + B_4) V''_1 + C_2 (\lambda' \gamma)' + (B_2 - A_2) \lambda' \gamma' + \left(A_3 + \frac{ap}{g} e \right) \lambda'' \gamma \\ & + \frac{ap}{g} e \lambda \gamma'' = ap \left(\alpha \frac{J_z}{g} + \lambda \frac{J_z}{g} - \lambda \gamma \right) - bq \frac{J_z}{g} - \tau \zeta - lT; \end{aligned} \right.$$

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\mathbf{I} \Omega W'_2 + (C'_2 + C'_3 + B'_4) V''_2 + C'_2 (\lambda' \gamma)' + (B'_2 - A'_2) \lambda' \gamma' + \left(A'_3 + 2 \frac{ap}{g} e \right) \lambda'' \gamma \\ & + 2 \frac{ap}{g} e \lambda \gamma'' = 2ap \left(\beta \frac{J_z}{g} + \lambda \frac{J_z}{g} - \lambda \gamma \right) + bq \frac{J_z}{g} + \tau \theta + M(\zeta - \theta) - lT; \end{aligned} \right.$$

$$(52) \quad -(B + B_4) W'_1 + \frac{ap}{g} e \gamma'' + \frac{ap}{g} l \zeta'' + \mathbf{I} \Omega V'_1 = ap \left(\frac{J_z}{g} - \alpha - \gamma \right) + cT;$$

$$(53) \quad -(B' + B'_4) W'_2 + 2 \frac{ap}{g} e \gamma'' - 2 \frac{ap}{g} l \zeta'' - \mathbf{I} \Omega V'_2 = 2ap \left(\frac{J_z}{g} - \beta - \gamma \right) - cT,$$

où les variables ζ , θ , α , β sont supposées comptées à partir des valeurs correspondant à la position d'équilibre.

⁽⁷⁵⁾ La question est envisagée par J. PELUCHON, 1, p. 96.

Répétant le raisonnement du paragraphe 48, on vérifiera que l'influence des termes en $(\lambda'\gamma)', \lambda''\gamma, \lambda\gamma''$ du premier membre disparaît si les moments d'inertie des éléments sensibles vérifient les relations

$$(54) \quad B_2 = A_2 + A_3 + 2 \frac{ap}{g} e; \quad B'_2 = A'_2 + A'_3 + 4 \frac{ap}{g} e;$$

d'où l'utilité d'une compensation analogue à celle du single-gyro surtout pour atténuer l'influence du roulis.

Ce réglage étant supposé réalisé, j'étudie les *déviations balistiques* sous l'influence d'un changement de cap ou de vitesse. Les équations (50), . . . (53) multipliées par dt et intégrées dans l'intervalle qui s'étend depuis l'apparition de l'accélération perturbatrice, jusqu'à l'instant où λ et γ ont retrouvé la valeur 0, dans l'hypothèse que cette durée de la perturbation est courte par rapport aux deux périodes, donnent, en négligeant les termes habituels (§ 48), et supposant qu'il n'y ait pas de surcharge q ,

$$(55) \quad \begin{cases} I\Omega \delta V_1 = ap \frac{\delta v_z}{g}; & I\Omega \delta V_2 = -2ap \frac{\delta v_z}{g}; \\ I\Omega \delta W_1 = ap\delta; & I\Omega \delta W_2 = -2ap\delta, \end{cases}$$

δ désignant l'intégrale $\int_0^{t_2} \left(\lambda \frac{J_z}{g} - \gamma \frac{J_r}{g} - \lambda\gamma \right) dt$ déjà rencontrée dans les études précédentes (§ 39 et 48). Chaque gyro se déplace évidemment comme s'il était libre. Si le compas est construit de manière que la période du gyro ouest soit celle d'un pendule ayant pour longueur le rayon de la terre, le compas se trouve à l'instant t_2 avoir son nouvel azimut d'équilibre, mais les équations (55) montrent que θ, α, β n'ont pas les valeurs correspondant à l'équilibre : il y a donc une oscillation, dont l'amplitude s'obtient en remplaçant dans les formules (45) ζ_0 par 0, $\theta_0 - \zeta_0$ par $-\frac{3ap}{I\Omega} \frac{\delta v_z}{g}$, $\beta_0 = -2\alpha_0$ par la valeur $\frac{2ap}{I\Omega} \delta$. On voit ainsi que β_0 et α_0 , dans l'hypothèse où je me suis placé, n'ont de valeur sensible que pour des accélérations obliques sur le méridien. Pour une accélération est-ouest ou nord-sud, on a

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad h_2 = -h_1 = \frac{\theta_0 - \zeta_0}{2\sqrt{ap}(v_2^2 - v_1^2)},$$

donnant, pour amplitude de la déviation la fraction $\frac{6x}{v_2^2 - v_1^2}$ de l'angle qui sépare l'ancienne et la nouvelle position d'équilibre ou à peu près $\frac{6x}{2y+x}$, si v_2^2 est beaucoup plus grand que v_1^2 . Si l'accélération est oblique sur le méridien, α_0 n'est pas nul, il est susceptible de prendre une valeur de quelque importance (§ 39 et 48), et, si les deux périodes sont bien diffé-

rentes l'une de l'autre, entraîner pour ζ une déviation consécutive du même ordre de grandeur que s'il s'agissait d'un Anschütz, avec cette réserve que le système amortisseur n'intervient pas sensiblement.

Si la période courte est comparable à la durée de la perturbation, il est nécessaire d'examiner en détail ce qui se passe pendant ce temps. Je suppose qu'il s'agisse d'une variation de vitesse à cap constant, avec une accélération constante. Si je néglige, en première approximation, les produits de α et de β par J , si je néglige également ce qui se passe pendant que λ et γ oscillent vers leur nouvelle position d'équilibre, on peut dire que ζ , θ , α , β oscillent conformément aux équations (22), à partir des valeurs initiales, $\zeta_0 = \theta_0 = 0$, $\alpha_0 = \beta_0 = -\gamma$. Les formules (44) et (45), où l'amortissement est négligé, donnent alors

$$(56) \quad \zeta = \frac{J_z}{g} \sqrt{ap} \left(\frac{q_2}{v_1} \sin \rho_1 t - \frac{q_1}{v_2} \sin \rho_2 t \right),$$

$$(57) \quad \alpha = -\frac{J_z}{g} (q_2 \cos \rho_1 t - q_1 \cos \rho_2 t),$$

où l'on a posé

$$(58) \quad v_1^2 - \tau + 3x = (v_2^2 - v_1^2) q_1; \quad v_2^2 - \tau + 3x = (v_2^2 - v_1^2) q_2$$

(q_1 vaut à peu près $\frac{3x}{2y+x}$; q_2 , à peu près $1 + q_1$).

Pour plus d'approximation, on pourra tenir compte, dans le second membre de l'équation (50), du terme négligé $ap\alpha \frac{J_z}{g}$, où l'on remplacera α par l'expression approchée ci-dessus. L'intégrale

$$(59) \quad -\frac{ap J_z}{I\Omega g} \int_0^t \alpha dt$$

sera à ajouter à la valeur trouvée pour α . Elle a pour valeur

$$(60) \quad \frac{ap J_z}{I\Omega g^2} \left(\frac{q_2}{\rho_1} \sin \rho_1 t - \frac{q_1}{\rho_2} \sin \rho_2 t \right).$$

Le premier de ces deux termes est le terme $\frac{ap}{I\Omega} \mathcal{J}$ qui correspondrait au gyro ouest monté en Anschütz (les deux tiers du terme analogue correspondant aux deux gyros montés dans le même sens sur une même charpente). Ce terme est très légèrement atténué au début par le second terme; cette atténuation, qui cesse d'ailleurs si $\sin \rho_2 t$ vient à changer de signe, est faible, le rapport des deux termes décroissant à partir de sa valeur initiale $\frac{q_1}{q_2}$. Ce terme (60) qui vient s'ajouter à l'expression (57) ne peut

d'ailleurs être utilisé pour la compenser, la comparaison des signes dépendant du signe de J_v .

Les expressions (57) et (60) donnant la valeur de α au moment où l'accélération J cesse, on aura l'oscillation consécutive en prenant pour valeur initiale de ζ l'expression (56) diminuée de l'angle de la nouvelle position d'équilibre avec l'ancienne (zéro, si la période $\frac{2\pi}{\rho_1}$ est convenablement choisie), et pour α la valeur précédente (57) (60) augmentée de $\frac{J_v}{g}$. On se rend compte que le résultat est du même ordre que s'il s'agissait du gyro Ouest monté en Anschütz; il y a, si la perturbation est rapide, un certain gain par rapport à ce que donnerait le système des deux gyros.

L'étude du *roulis* se fait simplement en appliquant la méthode du paragraphe 48 aux équations (50), . . . (53); on vérifie immédiatement que le réglage défini par les équations (54) annule l'influence de l'inertie des armatures. Ce réglage étant supposé réalisé, la méthode donne les déviations permanentes des variables V_1, V_2, W_1, W_2 : la déviation en azimut (V_1) s'obtient en multipliant par le facteur

$$(61) \quad \frac{2}{3} \frac{2ap(y-x-\tau) + 3kc^2(y-\tau)}{2ap(y_1+2x-\tau) + 3kc^2(y-\tau)}$$

la déviation que présenterait le système des deux gyros montés dans le même sens sur une même charpente (moment cinétique $2I\Omega$, moment des poids $3ap$).

La représentation graphique donne une étude simple de ce rapport : je trace les droites

$$(D) \ y + 2x - \tau = 0, \quad (E) \ y - x - \tau = 0,$$

puis les droites (D') et (E') lieux des points annulant le dénominateur ou le numérateur du facteur (61); ces droites sont voisines de (D) et de (E); elles sont comprises dans leur angle. Le facteur (61) vaut les deux tiers du rapport $\frac{mp}{mq}$ des distances du point $m(x, y)$ à ces deux droites, ces distances étant comptées parallèlement à Oy .

Ce rapport peut être pris aussi voisin de zéro que l'on veut, à condition de placer le point m près de la droite (D'); mais les conditions de stabilité étudiées précédemment exigent que le point m soit assez éloigné sur cette droite (x serait alors du même ordre que y). Si y est grand par rapport à x et à τ , le rapport vaut $2/3$, il est le même que pour le gyro Ouest disposé en Anschütz.

On voit que l'amortissement intervient peu; son influence est légèrement défavorable, puisqu'elle remplace les droites (D) et (E) par deux autres plus rapprochées.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DU COMPAS ANSCHÜTZ À TROIS GYROSTATS (1912).

60. Description ⁽⁷⁶⁾. — La caractéristique principale de ce compas est l'emploi de deux gyros supplémentaires destinés à le stabiliser dans tous les azimuts, de manière à l'empêcher d'osciller au roulis. Dans les compas précédents, la déviation permanente était due, en effet, à cette oscillation.

Un flotteur U (fig. 10) porte dans un même plan horizontal trois gyrostats G, G', G'' , identiques. L'un d'eux, G par exemple, est formé d'un gyro U_2 à axe horizontal $M_2 N_2$ monté dans une boîte U_1 articulée au flotteur suivant la verticale $M_1 N_1$ de son centre de gravité. Les trois axes $M_1 N_1, M'_1 N'_1, M''_1 N''_1$ sont les arêtes d'un prisme triangulaire régulier. Le gyro G est au Sud du flotteur. Dans la position d'équilibre, son moment cinétique $I\Omega$ est dirigé vers le Nord; les moments cinétiques de G' et de G'' ont la même valeur $I\Omega$; ils font avec lui l'angle de 30 degrés. L'axe du gyro G est rappelé vers cette position par deux ressorts antagonistes. Les gyros G' et G'' sont reliés par un système articulé qui les oblige à conserver des orientations symétriques par rapport à la ligne NS du compas. Deux ressorts antagonistes rappellent ce système vers sa position d'équilibre.

Les trois gyros G, G', G'' concourent à assurer la direction du compas. Les gyros G', G'' ont en outre la fonction d'assurer la stabilité latérale.

L'amortissement utilise la dissipation d'énergie produite par les frottements intérieurs d'un liquide (§ 31). A cet effet, le flotteur porte, à sa partie inférieure, une cuve annulaire renfermant de l'huile. Cette cuve est divisée en un certain nombre de compartiments reliés deux à deux par de petits tubes, dont le faible diamètre rend l'écoulement d'huile très lent. La lenteur de cet écoulement est réglée de manière à assurer l'amortissement maximum ⁽⁷⁷⁾.

⁽⁷⁶⁾ Voir § 2, note 16; je n'ai pu me procurer les articles allemands de D. FLIR, 1, M. IVEN, 1.

⁽⁷⁷⁾ Les derniers échantillons ont un quatrième gyro; mais celui-ci est indépendant du flotteur : il sert uniquement à stabiliser la cuve au roulis; voir O. SCHLICK, 1.

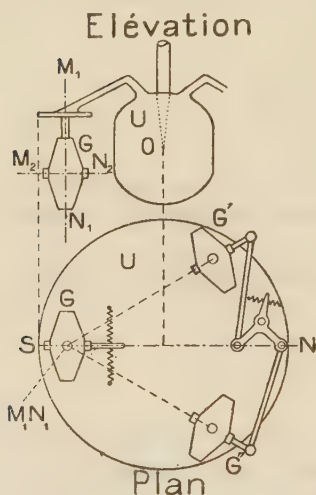


Fig. 10.

61. Étude élémentaire de l'équilibre. — Le ressort du gyro Sud n'a d'autre but que de donner plus de souplesse à l'appareil, en diminuant la dépendance entre le flotteur et le gyro; il ne joue aucun rôle dans l'étude de principe (voir § 65), je supposerai donc ici le gyro Sud invariablement lié au flotteur.

La loi fondamentale de la mécanique appliquée au flotteur entier (gyros et liquide compris) montre que *le poids total, la poussée du mercure et les trois couples d'aimantation fictive, forment un système de vecteurs équivalent à zéro.* L'axe de chacun de ces couples étant le produit vectoriel du moment cinétique $I\Omega$ correspondant par la rotation ε de la terre, le couple résultant a pour axe le produit vectoriel du moment cinétique résultant par le vecteur ε . Ce moment cinétique résultant (dont la valeur est $I\Omega (1 + \sqrt{3})$) étant parallèle à la ligne $\mathfrak{U}\mathfrak{S}$ de la rose, il en résulte immédiatement que cette ligne $\mathfrak{U}\mathfrak{S}$ est dans le méridien. On voit que *le système amortisseur ne produit aucune erreur de latitude.*

Dans l'hémisphère Nord, les composantes verticales de l'aimantation fictive ont pour effet de soulever légèrement le pôle $\mathfrak{U}$ du compas. Un petit curseur mobile le long d'une réglette parallèle à $\mathfrak{U}\mathfrak{S}$ permet de réaliser l'horizontalité parfaite de la rose à chaque latitude.

Dans la position d'équilibre, les ressorts du système articulé qui relie G' à G'' devront avoir une certaine action pour compenser l'effet des deux couples d'aimantation fictive.

62. Étude élémentaire des oscillations. — On conçoit que le système amortisseur de ce compas soit difficilement susceptible d'une étude élémentaire. J'étudie donc les oscillations d'un Anschütz sans liquide amortisseur.

J'applique le théorème de Résal au système entier par rapport au point fixe O , en supposant le système dominé gyrostatiquement (note 57). Soient ζ, θ, λ les angles définissant la position du trièdre principal lié au flotteur (§ 26). Le moment cinétique du système a la valeur

$$(1) \quad O\gamma = I\Omega [1 + 2 \cos (30^\circ + \beta)],$$

si $30^\circ + \beta$ et $-(30^\circ + \beta)$ sont les angles des axes des deux gyros $G'G''$ avec la ligne $\mathfrak{U}\mathfrak{S}$. Le théorème de Résal donne pour les composantes de la vitesse du point γ suivant $O\gamma$, suivant la verticale, et suivant l'horizontale perpendiculaire à $O\gamma$, les valeurs approchées suivantes valables dans le cas de petites oscillations

$$(2) \quad \frac{d\gamma}{dt} = -I\Omega \frac{d\beta}{dt} = -\Pi f \lambda;$$

$$(3) \quad -\gamma \frac{d\theta}{dt} = -\gamma \varepsilon \cos L \zeta;$$

$$(4) \quad \gamma \frac{d\zeta}{dt} = -\Pi f \theta$$

(II poids total, f rayon métacentrique du flotteur). Puisqu'il ne s'agit que de petites oscillations, on peut supposer que le couple formé par les composantes verticales des aimantations fictives, et dont la valeur est $I\Omega\varepsilon \sin L [1 + 2 \cos (30^\circ + \beta)]$ est encore exactement compensé par le déplacement de la surcharge (§ 61).

γ étant sensiblement égal à $I\Omega (1 + \sqrt{3})$, les équations (3) et (4) donnent le mouvement de la ligne $\mathfrak{N}\mathfrak{S}$. Ce mouvement est le même que si le flotteur portait invariablement lié un gyro de moment cinétique $I\Omega (1 + \sqrt{3})$. La période des petites oscillations est

$$(5) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I\Omega (1 + \sqrt{3})}{\Pi f \varepsilon \cos L}}.$$

Elle est d'environ 80 minutes.

J'obtiens la variation de λ et de β en utilisant l'équation (2) et une autre que je vais établir : j'applique au gyro Ouest le théorème de Résal dans le mouvement autour de son centre de gravité, en projetant la vitesse de l'extrémité du moment cinétique sur l'axe d'articulation $M'_1 N'_1$, de manière à éliminer les réactions le long de cet axe. Cette vitesse résulte de quatre rotations de vitesses angulaires $\frac{d\zeta}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\lambda}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$.

La deuxième et la troisième donnent des vitesses composantes

$$- I\Omega \cos 30^\circ \frac{d\theta}{dt}, \quad I\Omega \sin 30^\circ \frac{d\lambda}{dt},$$

suivant $M'_1 N'_1$, le moment de l'aimantation fictive est $- I\Omega \varepsilon \cos L \sin 30^\circ$, si donc N' est le moment de l'action du système articulé sur la boîte U'_2 , le théorème de Résal donne ainsi l'équation

$$(6) \quad \frac{1}{2} I\Omega \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\sqrt{3}}{2} I\Omega \frac{d\theta}{dt} = N' - \frac{1}{2} I\Omega \varepsilon \cos L.$$

De même le gyro G'' donne l'équation

$$(7) \quad -\frac{1}{2} I\Omega \frac{d\lambda}{dt} - \frac{\sqrt{3}}{2} I\Omega \frac{d\theta}{dt} = N'' + \frac{1}{2} I\Omega \varepsilon \cos L.$$

N' et N'' sont liés par l'équation du travail virtuel appliquée au système articulé (gyros exclus) dans le déplacement virtuel $\delta\beta$: le travail de l'action du ressort est de la forme $f(\beta) \delta\beta$, ou $(Q - P\beta) \delta\beta$, si l'on borne $f(\beta)$ aux deux premiers termes de son développement. J'obtiens ainsi l'équation

$$(8) \quad -N' \delta\beta + N'' \delta\beta + (Q - P\beta) \delta\beta = 0.$$

L'élimination de N' et de N'' entre les équations (6), (7), (8) donne l'équation

$$(9) \quad I\Omega \frac{d\lambda}{dt} = -P\beta + Q - I\Omega \varepsilon \cos L = -P\beta,$$

en tenant compte de ce que β est nul dans la position d'équilibre.

Les équations (2) et (9) donnent la loi de variation de l'angle β et de l'inclinaison λ de la ligne $\mathcal{E}$ - $\mathcal{C}$ de la rose : λ et γ oscillent en quadrature avec la période

$$(10) \quad T_1 = 2\pi \frac{I\Omega}{\sqrt{P\Pi f}} :$$

elle est d'environ une minute.

On voit, sur les équations précédentes, que l'oscillation des variables ζ et θ (azimut et inclinaison de la ligne $\mathcal{N}$ - $\mathcal{S}$) est absolument indépendante de l'oscillation des variables λ et β (inclinaison de la ligne $\mathcal{E}$ - $\mathcal{C}$) et orientation des gyros latéraux).

63. Étude élémentaire des déviations balistiques. — Je suppose le compas soumis à une accélération d'entraînement J provoquée par un changement de cap ou d'allure. Les équations (2) (3) (4) doivent être modifiées par le remplacement du poids Π par le poids apparent, dont les composantes sont

$$-\Pi \frac{J_x}{g}, \quad -\Pi \frac{J_z}{g}, \quad -\Pi.$$

Si, en effet, comme je le suppose, le mercure prend sans retard à chaque instant la position d'équilibre qui correspond à la valeur de l'accélération J , le principe d'Archimède s'étend et la poussée est modifiée de la même manière. La forme *sphérique* du flotteur dans le voisinage de la surface libre fait que la ligne d'action de cette poussée rencontre l'axe de symétrie du flotteur en un point fixe dont la distance au centre de gravité est la constante f .

Ces équations (2), (3), (4) s'écrivent ainsi, en négligeant les valeurs de ζ , θ et λ ,

$$(11) \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\Pi f \frac{J_x}{g}; \quad \frac{d\theta}{dt} = 0; \quad \gamma \frac{d\zeta}{dt} = \Pi f \frac{J_z}{g}.$$

La ligne $\mathcal{N}$ - $\mathcal{S}$ de la rose se met horizontalement; elle se trouve à la fin de l'évolution dans la position d'équilibre correspondant aux nouvelles conditions de route, si l'on a (§ 30)

$$(12) \quad \frac{1}{\gamma} \Pi f \frac{\partial v_x}{g} = \frac{\partial v_x}{R \varepsilon \cos L},$$

c'est-à-dire si la période T des oscillations de la ligne $\mathcal{NS}$ est égale à celle du pendule ayant pour longueur le rayon de la terre.

En même temps, le moment cinétique γ se trouve augmenté [équations (11)] de la quantité

$$\delta\gamma = -\Pi f \frac{\delta v_r}{g},$$

c'est-à-dire que β se trouve avoir varié de

$$(13) \quad \delta\beta = -\frac{\delta\gamma}{\Omega} = \frac{\Pi f}{\Omega} \frac{\delta v_r}{g};$$

λ a d'ailleurs peu varié, si la perturbation est rapide, comme le montre l'équation (9).

Le compas, lorsque l'accélération a disparu, reprend sa position d'équilibre en oscillant autour de la ligne $\mathcal{NS}$, qui reste correcte, puisque les oscillations de ζ et de θ sont indépendantes (§ 62) des oscillations de β et de λ .

La variation de λ , lorsque la durée de perturbation est longue, modifie ces conclusions. Le système amortisseur les modifie également.

64. Mise en équations précise sans tenir compte du système amortisseur. — J'écrirai les équations de Lagrange. Comme ζ , θ , λ , β ne peuvent varier que lentement, d'après ce qui a été vu, il ne sera pas nécessaire de tenir compte des produits des dérivées ζ' , θ' , λ' , β' ou ζ'' , θ'' , λ'' , β'' , par ζ , θ , λ ou β . Comme précédemment, je conserverai les produits de λ et de β par J , pour le cas de déviations balistiques dont la durée serait de l'ordre (une minute) de la période de λ et de β .

La force vive du système formé par le flotteur et la masse de chaque gyro concentrée en son centre de gravité est

$$(1) \quad A\lambda'^2 + B\theta'^2 + C\zeta'^2,$$

A , B , C désignant les moments principaux d'inertie au point fixe O (point de contact de l'aiguille de centrage).

Pour avoir la force vive de la boîte U_1 , je dois ajouter la force vive du mouvement autour de son centre de gravité, soit

$$(2) \quad A_1\lambda'^2 + B_1\theta'^2 + C_1(\zeta' + \alpha')^2$$

(α angle de l'axe du gyro Sud avec $\mathcal{NS}$).

Pour avoir la force vive des boîtes U'_1 , U''_1 , j'ajoute de même (après réductions)

$$(3) \quad A_1\left(\frac{3\lambda'^2}{2} + \frac{\theta'^2}{2}\right) + B_1\left(\frac{3\theta'^2}{2} + \frac{\lambda'^2}{2}\right) + 2C_1(\zeta'^2 + \beta'^2).$$

Pour avoir la force vive des trois gyros U_2, U'_2, U''_2 , je dois ajouter la force vive du mouvement de chacun d'eux autour de son centre de gravité, soit

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & I(\varphi' + \lambda' - \zeta'\theta + \alpha\theta')^2 + B_2\theta'^2 + C_2(\zeta' + \alpha')^2 \\ & + I \left[\psi' + \lambda' \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\beta}{2} \right) - \zeta' \left(\theta \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\lambda}{2} \right) + \theta' \left(\frac{1}{2} + \beta \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]^2 \\ & + I \left[\chi' + \lambda' \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\beta}{2} \right) - \zeta' \left(\theta \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) - \theta' \left(\frac{1}{2} + \beta \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]^2 \\ & + B_2 \left(\frac{3\theta'^2}{2} + \frac{\lambda'^2}{2} \right) + 2C_2(\zeta'^2 + \beta'^2) \end{aligned} \right.$$

(φ, ψ, χ , angles de rotation propre des trois gyros).

Si je suppose les composantes verticales de l'aimantation fictive de chaque gyro équilibrées séparément par une surcharge de poids q placée à la distance b du centre d'articulation sur l'axe de chaque gyro, la force vive de ces surcharges n'est pas à retenir, étant insignifiante.

Les masses des surcharges étant supposées transportées aux centres de gravité des trois gyros, le travail du couple formé par la poussée du mercure et par le poids apparent du système ainsi défini est la différentielle de l'expression

$$(5) \quad -\Pi f \left(\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} \right) + \Pi f \frac{J_z}{g} (\theta + \lambda \zeta) - \Pi f \frac{J_z}{g} (\lambda - \theta \zeta).$$

À ce travail, il y a lieu d'ajouter, en vue du roulis (§ 36, expressions 5 et 6) un travail représenté approximativement par

$$(6) \quad (M\lambda_1'' + N\lambda_1') \delta\lambda + (m\theta_1'' + n\theta_1') \delta\theta.$$

Les couples provenant de la translation des trois surcharges donnent, pour ce qui est du poids réel, un travail rigoureusement annulé par le travail des composantes verticales de l'aimantation fictive, j'ai donc à tenir compte seulement du travail des couples dus à la translation des forces d'inertie d'entraînement des trois surcharges; c'est la différentielle de l'expression

$$(7) \quad bq \frac{J_z}{g} \beta - bq \frac{J_z}{g} [\zeta(1 + \sqrt{3}) + \alpha]$$

(en se bornant au premier ordre, puisque q est très petit).

Les composantes horizontales des trois aimantations fictives donnent

comme travail la différentielle de l'expression suivante, où τ désigne comme précédemment $I\Omega \varepsilon \cos L$,

$$(8) \quad -\tau \left[\frac{(\alpha + \zeta)^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} (\beta^2 + \zeta^2 + \theta^2) + \beta \right].$$

Les efforts intérieurs des ressorts maintenant les trois gyros ont pour travail virtuel une expression de la forme

$$(9) \quad -p\alpha\delta\alpha + (-P\beta + Q)\delta\beta \quad (\S\ 62).$$

J'écris les équations de Lagrange correspondant aux paramètres $\zeta, \theta, \alpha, \lambda, \beta$, les angles de rotation φ, ψ, χ étant éliminés comme il a été dit au paragraphe 25. J'obtiens les deux groupes d'équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{C}\zeta'' + c\alpha'' - I\Omega(1 + \sqrt{3})\theta' = \Pi f \frac{J_z}{g} \lambda - \tau\alpha - \tau\zeta(1 + \sqrt{3}) - bq \frac{J_z}{g}(1 + \sqrt{3}); \\ \mathfrak{V}\theta'' + I\Omega\alpha' + I\Omega(1 + \sqrt{3})\zeta' = \Pi f \left(\frac{J_z}{g} - \theta \right) - \tau\theta(1 + \sqrt{3}) + m\theta_1'' + n\theta_1'; \\ c(\zeta'' + \alpha'') - I\Omega\theta' = -\tau(\alpha + \zeta) - p\alpha - bq \frac{J_z}{g}; \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}\lambda'' - I\Omega\beta' = -\Pi f \left(\frac{J_z}{g} + \lambda \right) + M\lambda_1'' + N\lambda_1'; \\ 2c\beta'' + I\Omega\lambda' = -\tau\sqrt{3}\beta - P\beta + bq \frac{J_z}{g}; \end{array} \right.$$

où j'ai posé

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{C} = C + 3C_1 + 3C_2; & \mathfrak{A} = A + \frac{5}{2}A_1 + \frac{1}{2}B_1; \\ c = C_1 + C_2; & \mathfrak{V} = B + \frac{5}{2}B_1 + \frac{5}{2}B_2 + \frac{1}{2}A_1. \end{array} \right.$$

J'ai supprimé dans la dernière des équations (11) le terme constant $Q - \tau$ que je suppose annulé par réglage, de manière que β soit nul dans la position d'équilibre. Cette position, en évidence sur ces équations, a lieu pour $\zeta, \theta, \lambda, \alpha$ nuls.

65. Étude de l'oscillation libre sans amortisseur. — Les équations (10) et (11) dans le cas de l'oscillation libre ($J = 0$) possèdent la propriété remarquable, que déjà la théorie élémentaire faisait prévoir, de se séparer en deux groupes complètement indépendants : les équations (10) donnent la variation de ζ, θ, α ; les équations (11) donnent la variation de λ et de β .

L'équation caractéristique des équations (10) est

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \ominus r^2 + \tau(1 + \sqrt{3}) & -I\Omega r(1 + \sqrt{3}) & cr^2 + \tau \\ I\Omega r(1 + \sqrt{3}) & \mathfrak{V}\beta r^2 + \tau(1 + \sqrt{3}) + \Pi f & I\Omega r \\ cr^2 + \tau & -I\Omega r & cr^2 + \tau + p \end{vmatrix} = 0.$$

Elle admet trois racines en r^2 ; pour $I\Omega$ très grand, l'une de ces racines est finie et vaut sensiblement

$$(14) \quad r_1^2 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{\ominus + \mathfrak{z}c} [\tau\sqrt{3} + p(1 + \sqrt{3})] \quad \text{ou} \quad -\frac{p(1 + \sqrt{3})^2}{\ominus + \mathfrak{z}c};$$

sa période, relativement courte, ne dépend que de l'inertie du flotteur et de la tension du ressort du gyro Sud.

Une autre racine est voisine de zéro; sa valeur approchée est

$$(15) \quad r_2^2 = -\frac{\tau\Pi f}{I^2\Omega^2(1 + \sqrt{3})},$$

en négligeant τ devant Πf , c'est celle qui est donnée par l'étude élémentaire (§ 62).

Enfin, la troisième racine est très grande et vaut sensiblement

$$(16) \quad r_3^2 = -I^2\Omega^2 \frac{\ominus + \mathfrak{z}c}{(\ominus - c)\mathfrak{V}\beta c};$$

elle correspond à une nutation rapide, pratiquement absorbée.

Opérant de même sur les équations (11), j'obtiens pour λ et β une oscillation lente définie par

$$(17) \quad r_4^2 = -\frac{\Pi f(P + \tau\sqrt{3})}{I^2\Omega^2}, \quad \text{ou} \quad -\frac{\Pi fP}{I^2\Omega^2};$$

c'est celle qui est fournie par la théorie élémentaire. Une nutation rapide définie par l'autre racine

$$(18) \quad r_5^2 = -\frac{I^2\Omega^2}{\mathfrak{z}\lambda\mathfrak{V}c},$$

est absorbée par les résistances passives.

Les équations (10) montrent que ζ et $-\alpha$ varient en phase, θ en quadrature; λ et β varient en quadrature l'un par rapport à l'autre.

En formant les mineurs des coefficients de la deuxième ligne du déterminant caractéristique, on obtient des quantités proportionnelles aux coefficients des exponentielles. On trouve ainsi que les amplitudes de l'oscillation lente sont pour ζ , θ , α proportionnelles sensiblement aux nombres

$$(19) \quad \left| \frac{\tau}{1\Omega r_2} \right|, \quad (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2.$$

L'oscillation longue de α est donc sensiblement nulle.

Pour l'oscillation de période courte (racine r_1), les amplitudes de ζ , θ , α sont sensiblement proportionnelles aux nombres

$$(20) \quad \frac{e + \alpha c}{e - c(1 + \sqrt{3})}, \quad \left| r_1 \frac{e - c(1 + \sqrt{3})}{1\Omega(1 + \sqrt{3})} \right|, \quad 1 + \sqrt{3}.$$

L'amplitude de ζ est à peu près le quotient de l'amplitude de α par $1 + \sqrt{3}$. Celle de θ est beaucoup plus petite. La variation de α est due presque exclusivement à cette racine r_1 ; l'oscillation de courte période n'est importante que pour des valeurs initiales importantes de α ou une inclinaison appréciable du compas. Sa période étant courte, l'amortissement propre du ressort, négligé ici, l'absorbe d'ailleurs rapidement, de sorte que le mouvement en azimut de la rose est dû exclusivement à l'oscillation longue; l'autre peut être laissée de côté.

66. Introduction d'un système amortisseur formé d'une cuve annulaire de section uniforme (oscillation libre) ⁽⁷⁸⁾. —

Je suppose que le flotteur porte une cuve annulaire de section uniforme à axe vertical, divisée en un grand nombre de compartiments identiques, séparés par des cloisons méridiennes que traversent des tubes de petit diamètre (fig. 11).

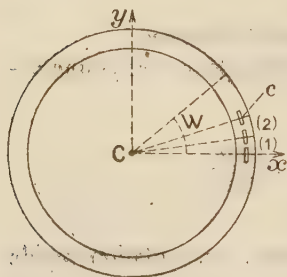


Fig. 11.

Les mouvements du compas étant lents, je néglige l'inertie non gyrostatique; je puis donc appliquer à l'écoulement dans ces petits tubes, dont le diamètre est une faible fraction de la longueur, la première loi de Poiseuille ⁽⁷⁹⁾: la vitesse est proportionnelle à la différence de niveau dans les deux compartiments.

Soit donc CX le diamètre Nord-Sud de la cuve, dans le plan de la surface libre, lorsque le liquide est en équilibre dans la cuve placée horizontalement; w_1 , w_2 , les angles polaires de deux compartiments voisins ($w_2 - w_1 = \delta w$ est constant tout le long de la

⁽⁷⁸⁾ Voir l'indiqué (H. BEGHIN, 2), les principaux résultats de cette étude.

⁽⁷⁹⁾ Voir A. BOULANGER, *Hydraulique générale*, Paris, 1909, t. I, p. 197.

cuve). Soient h_1, h_2 les cotes des deux surfaces libres à l'instant t , la cote h du compartiment w est une fonction

$$(21) \quad h = f(w, t).$$

La différence de niveau des compartiments $w_1 w_2$ s'obtient en ajoutant à $h_2 - h_1$, la différence de cote des deux compartiments due à l'inclinaison du compas, soit

$$(22) \quad \frac{\partial f}{\partial w} \delta w + \delta (a\lambda \sin w - a\theta \cos w) = \left(\frac{\partial f}{\partial w} + a\lambda \cos w + a\theta \sin w \right) \delta w,$$

où a désigne le rayon de la cuve.

La vitesse v_{12} dans le tube qui relie les compartiments (1) et (2), est proportionnelle à $h_1 - h_2$; si donc la vitesse dans le tube d'angle polaire w est la fonction $\varphi(w, t)$, on a la relation

$$(23) \quad \varphi(w, t) = -k \left(\frac{\partial f}{\partial w} + a\lambda \cos w + a\theta \sin w \right).$$

Mais, d'autre part, l'accroissement dh_1 de h_1 dans le temps dt est proportionnel à la quantité de liquide apportée par les tubes des deux cloisons du compartiment (1); on a donc

$$(24) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{bk} \frac{\partial \varphi}{\partial w},$$

b et k désignant des constantes positives; b est d'autant plus grand que la section des tubes est plus petite et que la viscosité est plus grande.

L'élimination de la fonction φ conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$(25) \quad b \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + a\lambda \sin w - a\theta \cos w = 0.$$

La solution de cette équation, qui convient au problème admet nécessairement la période 2π de la variable w . Je vais donc la chercher sous forme d'une série trigonométrique dont les coefficients seront des fonctions de t :

Or, si je prends deux fonctions u_1 et v_1 de t vérifiant les équations

$$(26) \quad bu'_1 + u_1 = a\theta, \quad bv'_1 + v_1 = -a\lambda, \quad (26)$$

la fonction $u_1 \cos w + v_1 \sin w$ vérifie évidemment l'équation (25). Il en résulte que si

$$(27) \quad f(w, t) = U_1 \cos w + V_1 \sin w + U_2 \cos 2w + V_2 \sin 2w + \dots$$

est l'expression de la fonction cherchée pour $t=0$ (la série n'a pas de terme U_0 indépendant de w , puisque le volume de liquide au-dessus du plan $h=0$ est égal au volume de liquide situé au-dessous), j'obtiens la solution du problème sous la forme

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} f(w, t) &= u_1 \cos w + v_1 \sin w + (U_2 \cos 2w + V_2 \sin 2w) e^{\frac{-4t}{b}} \\ &+ (U_3 \cos 3w + V_3 \sin 3w) e^{\frac{-9t}{b}} + \dots \end{aligned} \right.$$

les constantes d'intégration des intégrales u_1, v_1 des équations (26) étant choisies de manière que

$$u_1(0) = U_1, \quad v_1(0) = V_1.$$

Je vais chercher l'action du liquide sur le compas. L'inertie non gyrostatique étant négligée, le liquide sera considéré comme agissant statiquement. Cette action sera donc équivalente au poids du liquide. Si, dans le poids Π considéré précédemment (§ 64), je tiens compte du poids du liquide pour $h=0$, il reste à évaluer le travail virtuel des poids des diverses colonnes h de liquide, *ces poids étant appliqués au compas*; ce travail est de la forme

$$(29) \quad m \delta \theta \int_0^{2\pi} h \cos w \, dw - m \delta \lambda \int_0^{2\pi} h \sin w \, dw,$$

m dépendant des dimensions de la cuve. On vérifie immédiatement que, dans l'expression de h (28), les termes en $U_2, V_2, U_3, \dots$ donnent des intégrales nulles, seuls les termes en u_1 et v_1 sont à considérer, on obtient ainsi, pour ce travail virtuel, en supprimant les indices des lettres u_1 et v_1 ,

$$(30) \quad \pi m (u \delta \theta - v \delta \lambda).$$

J'introduis ce travail au second membre des équations (10) et (11) du mouvement, en adjoignant le terme $\pi m u$ à l'équation correspondant à θ , le terme $-\pi m v$ à l'équation en λ . Je néglige l'inertie non gyrostatique, ne tiens pas compte du ressort du gyro Sud qui est accessoire, et me place dans l'hypothèse d'une oscillation libre ($J=0$). Remplaçant θ et λ par les expressions (26), j'obtiens les quatre équations

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} I \Omega (bu'' + u') &= \tau a \zeta, \\ I \Omega (1 + \sqrt{3}) a \zeta' &= -\Pi f(bu' + u) + \pi m a u, \end{aligned} \right.$$

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} -I \Omega a \beta' &= \Pi f(bv' + v) - \pi m a v, \\ -I \Omega (bv'' + v') &= -(P + \tau \sqrt{3}) a \beta. \end{aligned} \right.$$

L'oscillation de u et de ζ s'étudie au moyen de l'équation caractéristique

$$(33) \quad [\Pi^2 \Omega^2 (1 + \sqrt{3}) r^2 + \Pi f \tau] (y + r) - \pi m a \tau y = 0,$$

où j'ai posé $\frac{1}{b} = y$. Cette équation représente une courbe Γ , lieu du point de coordonnées cartésiennes r, y . Je supposerai $\Pi f > \pi m a$, ce qui est évidemment indispensable à la stabilité. Les dimensions de la cuve ne peuvent

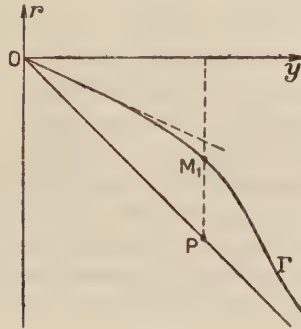


Fig. 12.

donc dépasser une certaine limite. La courbe Γ a la forme indiquée ci-contre (fig. 12). Pour une valeur donnée de y , l'équation a une racine r_1 négative, correspondant à une variation apériodique, les deux autres sont imaginaires :

$$r_2 = p + qi, \quad r_3 = p - qi.$$

Ces deux racines correspondent à une oscillation amortie ($p < 0$), car, la somme des trois racines étant $-y$, il en résulte que $2p$ a la valeur négative $-(y + r_1) = -PM_1$ (fig. 12). Lorsque y varie de zéro (écoulement très lent) à l'infini (écoulement rapide), PM_1 qui représente le double du facteur d'amortissement de l'oscillation, varie de zéro à zéro en passant par un maximum. L'équation (33) donne simplement le minimum de $(y + r_1)^{-1}$ qui se présente sous la forme $Ar_1 + Br_1^{-1}$; le maximum du facteur d'amortissement a lieu pour

$$(34) \quad y = \frac{\Pi f}{\Omega} \sqrt{\frac{\tau}{(1 + \sqrt{3})(\Pi f - \pi m a)}};$$

et l'on a alors

$$(35) \quad r_1 = -y \frac{2(\Pi f - \pi m a)}{2\Pi f - \pi m a}; \quad r_2 + r_3 = 2p = -y \frac{\pi m a}{2\Pi f - \pi m a}.$$

La période s'obtient en cherchant $r_2 r_3 = p^2 + q^2$, j'obtiens

$$(36) \quad p^2 + q^2 = \frac{\varepsilon \cos L}{\Omega} \frac{2\Pi f - \pi m a}{2(1 + \sqrt{3})}.$$

On voit dans quelle proportion elle est accrue par le dispositif amortisseur.

L'étude de v et de β sur les équations (32) conduit à une équation caractéristique qu'on déduit de (33) en y remplaçant τ par

$$(P + \tau\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}),$$

ou simplement par $P(1 + \sqrt{3})$. La courbe Γ' qu'elle représente est homothétique de la courbe Γ dans le rapport des périodes, soit 80. On voit donc que la valeur de y qui donnerait l'amortissement maximum de v et de β est tout à fait différente de la valeur (34); les deux oscillations ont le même décrement maximum. Comme c'est surtout l'oscillation de la ligne $\mathfrak{U}\mathfrak{S}$ qu'il y a lieu d'amortir, il y a lieu de se rapprocher de la condition (34). On constate alors que l'amortissement de λ est le double de l'amortissement maximum de la ligne $\mathfrak{U}\mathfrak{S}$, soit un décrement 40 fois moindre.

Ce système n'amortit donc dans de bonnes conditions que les oscillations en azimut. Pour les autres, c'est l'amortissement propre du ressort qui seul peut les amortir.

Les oscillations latérales n'étant guère amorties par ce dispositif, il y a lieu de se demander si la forme de la cuve est suffisamment appropriée au but poursuivi qui est l'amortissement en azimut. Le liquide intervient par le moment en O de son poids, moment qui est horizontal; on augmenterait la composante $\mathcal{E}-\mathcal{O}$ de ce moment en donnant à la cuve, dans le méridien, une section supérieure à sa section Est-Ouest. Or, d'après le théorème de Résal, c'est cette composante qui agit sur l'oscillation en azimut. D'autre part, la vitesse d'écoulement étant adaptée à la période de l'inclinaison θ et, pour ainsi dire synchronisée, il est manifeste que la modification précédente augmentera l'action de θ , donc l'efficacité du dispositif. C'est ce que réalise le dispositif Anschütz.

67. Système amortisseur Anschütz. — La cuve annulaire est divisée en huit compartiments égaux quatre à quatre par des cloisons à 45° les unes des autres (fig. 13). La surface libre de l'huile $C\mathfrak{N}\mathfrak{S}$ dans la position d'équilibre détermine dans les compartiments (1), (4), (5), (8) des aires égales S_1 , dans les autres, des aires S_2 inférieures à S_1 . Les centres de gravité $g_1, \dots, g_8$ de ces sections sont sur un cercle de rayon a , symétriques deux à deux par rapport à $C\mathfrak{N}$ et à $C\mathfrak{S}$; leurs angles polaires $w_1, \dots, w_8$ s'expriment en fonction de w_1 et de w_2 par les relations

$$w_3 = \pi - w_2, \quad w_4 = \pi - w_1, \quad w_5 = \pi + w_1, \dots$$

Les hauteurs de liquide $h_1, \dots, h_8$ au-dessus du plan $CC\delta$, hauteurs comptées au centre de gravité de chaque section, vérifient l'égalité

$$S_1(h_1 + h_4 + h_5 + h_8) + S_2(h_2 + h_3 + h_6 + h_7) = 0. \quad (35)$$

Je mettrai le problème en équations en procédant comme au paragraphe 66, et faisant les mêmes approximations; je supposerai cependant le cas général d'une accélération perturbatrice horizontale J .

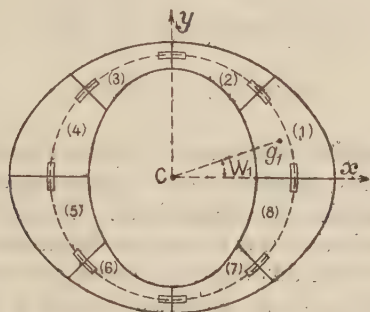


Fig. 13.

La différence de niveau entre les compartiments (1) et (2) est

$$h_2 - h_1 + a(\cos w_1 - \cos w_2) \left(\theta - \frac{J_x}{g} \right) + a(\sin w_2 - \sin w_1) \left(\lambda + \frac{J_y}{g} \right).$$

Appliquant la loi de Poiseuille à la vitesse d'écoulement v_{12} entre deux compartiments et exprimant que la dérivée h'_1 est proportionnelle à la différence $v_{81} - v_{12}$, et opérant de même pour tous les compartiments, j'obtiens huit équations de la forme

$$(37) \quad \begin{cases} bS_1 h'_i = h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1} + a \left(\frac{J_x}{g} - \theta \right) (\cos w_{i+1} - 2\cos w_i + \cos w_{i-1}) \\ \quad + a \left(\frac{J_y}{g} + \lambda \right) (\sin w_{i+1} - 2\sin w_i + \sin w_{i-1}); \end{cases}$$

en les combinant par addition et soustraction, on obtient

$$(38) \quad bS_1 u'_1 = u_2 - u_1 + 4a(\cos w_2 - \cos w_1) \left(\frac{J_x}{g} - \theta \right),$$

$$(39) \quad bS_2 u'_2 = u_1 - 3u_2 + 4a(\cos w_1 - 3\cos w_2) \left(\frac{J_x}{g} - \theta \right),$$

$$(40) \left\{ \begin{aligned} bS_1 v'_1 &= v_2 - 3v_1 + 4a(\sin w_2 - 3 \sin w_1) \left(\frac{J_r}{g} + \lambda \right), \\ (41) \left\{ \begin{aligned} bS_2 v'_1 &= v_1 - v_2 + 4a(\sin w_1 - \sin w_2) \left(\frac{J_r}{g} + \lambda \right), \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

si l'on pose

$$(42) \quad u_1 = h_1 - h_4 - h_5 + h_8;$$

$$(43) \quad u_2 = h_2 - h_3 - h_6 + h_7,$$

$$(44) \quad v_1 = h_1 + h_4 - h_5 - h_8;$$

$$(45) \quad v_2 = h_2 + h_3 - h_6 - h_7.$$

Le travail élémentaire de l'action du liquide amortisseur sur le flotteur est le travail du poids apparent de ce liquide *supposé appliqué au flotteur*, si l'on néglige l'inertie non gyrostatique. Si, dans Πf (§ 62), j'ai tenu compte du poids du liquide dans la position d'équilibre ($h_1 = \dots = h_8 = 0$), j'ai à exprimer le travail du couple (γ) formé par les poids apparents des hauteurs de liquide $h_1, \dots, h_8$, en tenant compte de l'inclinaison des surfaces libres sur $CX\mathfrak{Y}$. Comme il s'agit d'un couple, je puis évaluer son travail dans la rotation autour du point C, considéré comme fixe.

Soient x, y, z les coordonnées, par rapport à $CX\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, du centre de gravité d'un cylindre élémentaire de liquide parallèle à $C\mathfrak{Z}$, compris entre le plan $CX\mathfrak{Y}$ et le plan de surface libre. Dans un même compartiment de rang i , x, y, z sont liés par la relation

$$(46) \quad 2z = \left(\theta - \frac{J_x}{g} \right) (x - a \cos w_i) - \left(\lambda + \frac{J_r}{g} \right) (y - a \sin w_i) + h_i.$$

Le déplacement virtuel de ce centre de gravité, *supposé invariablement lié au flotteur*, est

$$(47) \quad -y \delta \zeta + z \delta \theta, \quad x \delta \zeta - z \delta \lambda, \quad -x \delta \theta + y \delta \lambda,$$

de sorte que le travail virtuel du couple (γ) est

$$(48) \quad 2\varpi \Sigma (yz ds) \left(\frac{J_x}{g} \delta \zeta - \delta \lambda \right) + 2\varpi \Sigma (zx ds) \left(-\frac{J_r}{g} \delta \zeta + \delta \theta \right),$$

si l'on néglige le produit de l'accélération J par l'expression $\Sigma (x^2 ds)$. (Dans ces expressions, le signe Σ s'étend à tous les éléments d'aire ds de la surface libre de la cuve entière; ϖ poids de l'unité de volume du liquide.)

En tenant compte des symétries, et en posant

$$(49) \quad \Sigma (x - a \cos w_i)^2 ds = E, \quad \Sigma (y - a \sin w_i)^2 ds = F,$$

j'obtiens le travail

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varpi \left(\delta\theta - \frac{J_r}{g} \delta\zeta \right) \left[E \left(\theta - \frac{J_r}{g} \right) + a(S_1 u_1 \cos w_1 + S_2 u_2 \cos w_2) \right] \\ + \varpi \left(\delta\lambda - \frac{J_r}{g} \delta\zeta \right) \left[F \left(\lambda + \frac{J_r}{g} \right) - a(S_1 v_1 \sin w_1 + S_2 v_2 \sin w_2) \right]. \end{array} \right.$$

C'est ce travail qu'il y a lieu d'adjoindre au travail des forces données, tel qu'il a été calculé au paragraphe 64.

Négligeant l'inertie non gyrostatique et ne tenant pas compte du ressort du gyro Sud, ou des termes absolument négligeables dus aux surcharges q , j'obtiens les équations

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} -I\Omega(1 + \sqrt{3})\theta' = -\tau(1 + \sqrt{3})\zeta + \frac{J_r}{g} \varpi a(S_1 v_1 \sin w_1 + S_2 v_2 \sin w_2) \\ + \frac{J_r J_r}{g^2} \varpi(E - F) + \lambda \frac{J_r}{g} (\Pi f - \varpi F) - \frac{J_r}{g} \varpi a(S_1 u_1 \cos w_1 + S_2 u_2 \cos w_2), \end{array} \right.$$

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} I\Omega(1 + \sqrt{3})\zeta' = (\Pi f - \varpi E) \left(\frac{J_r}{g} - \theta \right) + \varpi a(S_1 u_1 \cos w_1 + S_2 u_2 \cos w_2) \\ + m\theta_1' + n\theta_1', \end{array} \right.$$

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} -I\Omega\beta' = -(\Pi f - \varpi F) \left(\frac{J_r}{g} + \lambda \right) - \varpi a(S_1 v_1 \sin w_1 + S_2 v_2 \sin w_2) \\ + M\lambda_1' + N\lambda_1', \end{array} \right.$$

$$(54) \quad I\Omega\lambda' = -(P + \tau\sqrt{3})\beta,$$

auxquelles il y a lieu d'adjoindre les quatre équations (38) . . . (41).

68. Étude de l'oscillation libre (amortisseur Anschütz). —

Je suppose λ_1, θ_1, J nuls; il est intéressant de remarquer que les équations du mouvement se séparent ici encore en deux groupes distincts, les équations (38), (39), (51), (52) déterminant ζ, θ, u_1, u_2 , les équations (40), (41), (53), (54) déterminant λ, β, v_1, v_2 .

Posant comme au paragraphe 66 $y = \frac{1}{b}$, l'équation caractéristique du premier de ces groupes s'écrit

$$(55) \quad (r - \mu y)(r - \mu' y) + Kr^2(r - m_1 y)(r - m_2 y) = 0,$$

K étant défini par

$$(56) \quad K\tau(\Pi f - \varpi E) = I^2\Omega^2(1 + \sqrt{3}),$$

m_1, m_2 désignant les racines de l'équation

$$(57) \quad S_1 S_2 m^2 + (3S_1 + S_2)m + 2 = 0,$$

μ, μ' les racines de l'équation

$$(58) \quad (\mu - m_1)(\mu - m_2) - k(\mu - m_3) = 0,$$

où k et m_3 sont définis par

$$(59) \quad (\Pi f - \varpi E)k = 4\varpi a^2(\cos^2 w_1 - 2 \cos w_1 \cos w_2 + 3 \cos^2 w_2),$$

$$(60) \quad m_3 S_1 S_2 (\cos^2 w_1 - 2 \cos w_1 \cos w_2 + 3 \cos^2 w_2) + 2(S_1 \cos^2 w_1 + S_2 \cos^2 w_2) = 0.$$

L'équation (55), dans le plan des y, r , représente une courbe du 4^e ordre (Γ) (fig. 14); m_1, m_2, m_3, μ, μ' sont les coefficients angulaires de droites $D_1, D_2, D_3, \Delta, \Delta'$. La courbe (Γ) est tangente en O aux droites Δ, Δ' ; elle est asymptote aux droites D_1, D_2 .

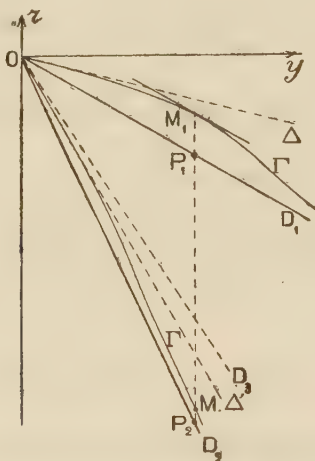


Fig. 14.

La largeur de la cuve de l'Anschütz dans le plan $C\mathcal{L}\mathcal{N}$ est environ trois fois sa largeur l dans le plan $C\mathcal{N}\mathcal{L}$, on en déduit ainsi les valeurs approchées suivantes :

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{ll} S_1 = 2,07 al; & S_2 = 1,07 al; \\ \sin w_1 = 0,35; & \cos w_1 = 0,937; \quad \sin w_2 = 0,90; \quad \cos w_2 = 0,43; \\ m_1 al = -0,3; & m_2 al = -3,03; \quad m_3 al = -2,95. \end{array} \right.$$

Les droites Δ et Δ' sont d'autant plus voisines de D_1 et de D_2 que k est plus petit; si k était trop grand

$$(62) \quad 4\varpi a^2(S_1 \cos^2 w_1 + S_2 \cos^2 w_2) > \Pi f - \varpi E,$$

c'est-à-dire, si la surface libre du liquide était trop grande, la droite Δ passerait au-dessus de Oy et le mouvement serait instable.

k remplissant la condition (62), la courbe présente la forme de la figure, donnant ainsi pour chaque valeur de y deux valeurs de r négatives et deux valeurs imaginaires de la forme $p \pm qi$. La somme de ces quatre racines étant $(m_1 + m_2)y$, on en déduit

$$(63) \quad 2p = (P_1 M_1 + P_2 M_2),$$

ce qui permet d'obtenir graphiquement le facteur d'amortissement $-p$ du mouvement sinusoïdal. Je vais chercher son maximum. J'obtiens une valeur approchée de μ en utilisant le produit des racines de l'équation (58) et remarquant que μ' est voisin de m_2 ,

$$(64) \quad \mu = m_1 + k \frac{m_3}{m_2},$$

La somme des racines, μ étant beaucoup plus petit, me donne une valeur très approchée de μ'

$$(65) \quad \mu' = m_2 + k \frac{m_3 - m_1}{m_2}.$$

La valeur de μ montre que le mouvement serait instable si kal dépassait la valeur 0,3. La valeur 0,2 est donc une limite qu'il n'y aura vraisemblablement pas lieu de dépasser; il y aura d'ailleurs intérêt à s'en rapprocher, comme on va le voir.

Ces valeurs montrent simplement que $M_2 P_2$ est une fraction très faible de $M_1 P_1$ qui n'atteint pas 0,03, de sorte que seule la valeur de $M_1 P_1$ importe. Pour chercher son maximum, je remplace dans l'équation (55) de la courbe, le facteur $r - \mu'y$ par $r - m_2 y$, quantités dont le rapport est voisin de l'unité, le long de la branche décrite par M_1 . J'obtiens une courbe (Γ_1) très voisine de la courbe (Γ) :

$$(66) \quad r - \mu y + Kr^2(r - m_1 y) = 0.$$

J'obtiens le maximum de $M_1 P_1$ en menant à cette courbe une tangente de coefficient angulaire m_1 ; les valeurs de y et de r_1 correspondantes sont définies par les conditions

$$(67) \quad (\mu + m_1)r_1 = 2m_1\mu y; \quad 4Km_1^3 y^2 \mu = (\mu + m_1)^2.$$

Le maximum du facteur d'amortissement $-p$ de l'oscillation est défini par

$$(68) \quad -2p = r_1 - m_1 y = \frac{m_1}{m_1 + \mu} (\mu - m_1) y = k \frac{m_3}{m_2} \frac{1}{2\sqrt{Km_1\mu}}.$$

La période est définie par

$$(69) \quad p^2 + q^2 = \frac{\mu \mu' y^2}{K r_1 r_2} = \frac{\mu + m_1}{2m_1} \frac{1}{K}.$$

Elle est comprise entre $2\Pi\sqrt{K}$ ($kal=0$) et $2\Pi\sqrt{2K}$ qui correspond à $kal=0,3$, valeur que kal ne peut dépasser. Dans l'hypothèse $kal=0,2$, elle serait $1,2 \times 2\Pi\sqrt{K}$, K étant donné par l'équation (56). La valeur 0,2 donnée pour kal à titre d'indication correspondrait à un décrement maximum de l'ordre de 1,8 obtenu en réglant convenablement y , c'est-à-dire l'écoulement de l'huile⁽⁸⁰⁾.

Le second groupe d'équations s'étudie de la même manière. Les droites D_1, D_2, D_3 ont alors les coefficients angulaires n_1, n_2, n_3 définis par

$$n_1 a l = -0,47; \quad n_2 a l = -1,91; \quad n_3 a l = -1,85;$$

les constantes K et k sont remplacées par H et h définies par

$$H(\Pi f - \varpi F) = I^2 \Omega^2,$$

$$h(\Pi f - \varpi F) = 4\varpi a^2 (\sin^2 w_2 - 2 \sin w_1 \sin w_2 + 3 \sin^2 w_1).$$

La période de l'oscillation amortie est sensiblement $2\pi\sqrt{H}$, le facteur d'amortissement est environ 1, 2 fois celui du premier groupe d'équations (éq. 68), ce qui correspond à un décrement extrêmement faible.

Il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux que donnerait une cuve formée de huit compartiments identiques, de même surface totale, la surface S_0 de chacun de ces compartiments étant, par suite, la demi-somme des sections précédentes S_1 et S_2 ; on a, dans ce cas,

$$w_1 = \frac{\pi}{8}, \quad w_2 = \frac{3\pi}{8}, \quad \mu' = m_2 = m_3 = -\frac{2,17}{al}; \quad m_1 = -\frac{0,37}{al}.$$

Dans l'hypothèse $kal=0,2$, on trouve que le facteur d'amortissement de l'oscillation en azimut est réduit dans le rapport 1,5 : l'avantage de l'étranglement Est-Ouest de la cuve est manifeste. Il est intéressant de remarquer que le facteur d'amortissement de l'oscillation latérale serait également réduit (rapport 1, 2).

69. Réglage de l'amortissement. — Pour régler la vitesse d'écoulement, on soulève l'extrémité Nord du compas d'un certain angle θ et on

⁽⁸⁰⁾ La variation de ζ et de θ présente encore deux autres termes, l'un en $e^{r_1 t}$ l'autre en $e^{r_2 t}$, le second s'amortit très vite, $|r_2|$ étant grand; le premier s'amortit plus vite que l'oscillation étudiée si $|\mu| > \left| \frac{m_1}{3} \right|$, c'est-à-dire si $k < \left| \frac{2m_1}{3} \right|$ ou $kal < 0,2$. Il y aurait donc inconvénient à donner à k une valeur inférieure.

laisse l'huile s'écouler : au bout de 20 minutes (c'est-à-dire un quart de la période du compas), l'huile doit être sensiblement au repos.

Les équations (37) donnent la variation de $h_1, \dots, h_8$ en y faisant λ et J nuls, et θ constant ; on a évidemment, pendant ce mouvement,

$$h_1 = h_8, h_2 = h_7, h_3 = h_6, h_4 = h_5.$$

on vérifie, d'autre part, que $h_1 + h_4$ et $h_2 + h_3$ restent nuls, les valeurs initiales des h étant nulles, de sorte que h_1 et h_2 seuls sont à déterminer ; ils sont définis par les équations

$$(70) \quad bS_1 h'_1 = h_2 - h_1 + a\theta (\cos w_1 - \cos w_2),$$

$$(71) \quad bS_2 h'_2 = h_1 - 3h_2 + a\theta (3 \cos w_2 - \cos w_1).$$

La solution convenant à la question est

$$h_1 = a\theta (0,925 - 0,86 e^{m_1 y t} - 0,06 e^{m_2 y t}),$$

$$h_2 = a\theta (0,425 + 0,024 e^{m_1 y t} - 0,44 e^{m_2 y t}).$$

Je remplace, dans ces formules, t par le quart de la période, y par la valeur réalisant le maximum d'amortissement (§ 68), ce qui donne aux exposants de e les valeurs

$$m_1 y t = -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_1 + \mu}{2\mu}} = -2,2,$$

$$m_2 y t = -22.$$

Les termes en $e^{m_2 y t}$ sont donc inappréciables, et l'on trouve que h_1 diffère de la valeur $0,925 a\theta$ qui correspond à l'équilibre, de $0,094 a\theta$, h_2 diffère de sa valeur d'équilibre $0,425 a\theta$ de $0,024 a\theta$; h_1 a parcouru 0,9 de sa course ; h_2 a parcouru 0,95 de sa course, si l'amortissement maximum est réalisé. Cette méthode est pratique, mais sans grande précision : il semble qu'il y aurait intérêt à faire porter l'observation sur les premières minutes du mouvement.

70. Étude des déviations balistiques. Roulis. — Je suppose le compas soumis à une accélération horizontale J , due à un changement de cap ou de vitesse, pendant un temps court par rapport aux deux périodes. Je multiplie les huit équations du mouvement (38) à (41) et (51) à (54) par dt , et je les intègre pendant la durée de la perturbation, en

supposant que les variables conservent sensiblement la valeur zéro. J'obtiens, en ce qui concerne les variables ζ , θ , u_1 , u_2 , les équations

$$(72) \quad I\Omega (1 + \sqrt{3}) \delta\zeta = (\Pi f - \varpi E) \frac{\delta v_x}{g};$$

$$(73) \quad \delta\theta = 0;$$

$$(74) \quad S_1 \delta u_1 = 4ay (\cos w_2 - \cos w_1) \frac{\delta v_x}{g};$$

$$(75) \quad S_2 \delta u_2 = 4ay (\cos w_1 - 3 \cos w_2) \frac{\delta v_x}{g};$$

Si l'on donne à la période de l'oscillation en azimut (calculée sans tenir compte de l'amortissement) une valeur égale à la période de l'oscillation d'un pendule ayant pour longueur le rayon de la terre (quatre-vingt-cinq minutes), la ligne $\mathfrak{NS}$ se trouve à la fin de la perturbation dans la position d'équilibre correspondant aux nouvelles conditions de route. *Si l'n'y avait pas de système amortisseur, elle conserverait cette position, et il n'y aurait pas de déviation balistique*; le compas oscillerait, en effet, à partir de la position initiale $\zeta_0 = \theta_0 = \lambda_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, et, comme les deux groupes de variables ζ , θ et λ , β oscillent indépendamment, ζ et θ resteraient nuls : le compas oscillerait autour de la ligne $\mathfrak{NS}$, qui resterait correcte. C'est ce que donne la théorie élémentaire (voir note 78, p. 114).

La présence du système amortisseur introduit dans le premier groupe les variables u_1 , u_2 , dont les valeurs, à la fin de la perturbation, sont données par les formules (74), (75), de sorte que l'oscillation ultérieure du compas a lieu à partir de la position initiale définie par

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_0 = 0, \quad S_1 (u_1)_0 = 4ay (\cos w_2 - \cos w_1) \frac{\delta v_x}{g}, \\ \theta_0 = 0, \quad S_2 (u_2)_0 = 4ay (\cos w_1 - 3 \cos w_2) \frac{\delta v_x}{g}, \end{array} \right.$$

l'azimut ζ ne conserve donc pas sa valeur. Le calcul des amplitudes ferait connaître les constantes de cette oscillation. L'équation (52) permet déjà d'en avoir le sens dans les premières minutes qui suivent la perturbation, elle donne, en effet, θ étant sensiblement nul, et u_1 et u_2 voisins de $(u_1)_0$ et $(u_2)_0$,

$$I\Omega (1 + \sqrt{3}) \zeta' = \varpi a [S_1 (u_1)_0 \cos w_1 + S_2 (u_2)_0 \cos w_2],$$

ou, en remplaçant $(u_1)_0$ et $(u_2)_0$ par les valeurs (76), ϖa par sa valeur en fonction de k (éq. 59),

$$(77) \quad I\Omega (1 + \sqrt{3}) \zeta' = -(\Pi f - \varpi E) ky \frac{\delta v_x}{g}.$$

Cette vitesse est dirigée en sens contraire de la déviation qui s'est produite pendant la perturbation. Cette particularité est nettement en évidence sur la courbe I (fig. 15) relevée par le Lieutenant de vaisseau *Rénon* à bord du sous-marin *Hermione* pour une diminution de vitesse de 10 nœuds, cap au Nord.

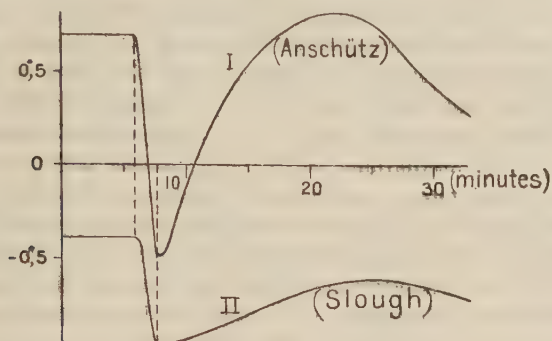


Fig. 15.

La courbe II relevée simultanément sur un Slough accuse également un retour en arrière de ζ , mais plus faible. C'est aussi le système amortisseur qui en est cause, mais le mode d'action est tout différent ; On a ici $J_x < 0$, $J_z = 0$. L'équation (15) [§ 51] est analogue à l'équation actuelle (52), $2\pi\omega hu$ remplaçant $\varpi a (S_1 u_1 \cos w_1 + S_2 u_2 \cos w_2)$, mais, Ω étant négatif dans le Slough, ces deux termes donnent à ζ' des valeurs de signes contraires. D'ailleurs, c'est le terme $2\pi\omega_0 hu$ qui produit la déviation $\delta\zeta$ pendant la durée de la perturbation (prolongée de une ou deux minutes jusqu'à l'instant t_2) ; à partir de cet instant, u a la valeur $h\theta$ correspondant à l'inclinaison prise par le compas sous l'influence du terme $-\rho \left(Ql \frac{J_x}{g} + 2\pi\omega_0 hu \right)$ (éq. 14), et c'est par cette valeur $h\theta$ due à ρ que u agit sur ζ (éq. 15) pour lui donner, à partir de l'instant t_2 , une vitesse en sens contraire de la première déviation.

Dans l'Anschütz, θ ne subit aucune déviation (éq. 51), u_1 et u_2 sont déviés aussi lentement que le compas ; ils agissent peu pendant la perturbation, mais ils acquièrent des valeurs qui persisteront longtemps après, et doivent par suite intervenir dans le calcul de l'oscillation ultérieure.

Si l'on cherche les valeurs de ζ' à la fin de la perturbation, dans le cas du Slough, en fonction de la période T et du facteur d'amortissement μ , on trouve, pour la perturbation considérée,

$$\zeta' = - \frac{8\mu\pi^2}{T^2 \cos L} \frac{\delta v_x}{g}.$$

Le même calcul fait pour l'Anschütz en tenant compte des conditions d'amortissement maximum (§ 68) donne exactement le double (à amortissement égal, à période égale). Le Slough utilisé avait une période dépassant

quatre-vingt-cinq minutes; la période de l'Anschütz était voisine de soixante-dix minutes.

Cet effet disparaît complètement, si l'accélération J est Est-Ouest. Les courbes relevées n'accusent d'ailleurs aucune déviation importante.

Si la durée de la perturbation est comparable à la période des oscillations transversales (une minute), les termes du second ordre en $J_x J_y$, λJ_x , $v_1 J_x$, $v_2 J_x$, dans le second membre de l'équation (51), termes que je viens de négliger, prennent quelque importance. Tout ce qui a été dit sur les termes analogues rencontrés dans le cas des compas Sperry et Slough subsiste ici, *atténué* par ce fait que λ , v_1 , v_2 varient plus lentement, mais à condition que les oscillations de λ , v_1 , v_2 soient suffisamment amorties. Ces termes contiennent en facteur le produit $\sin \Delta \cos \Delta$; leur action est donc maximum à 45 degrés du méridien. Pour une variation de vitesse Nord-Sud ou Est-Ouest, ces termes disparaissent, de sorte que ce qui a été dit à ce sujet subsiste intégralement dans ces deux cas.

Si les déviations balistiques de ce compas sont importantes, l'influence du *roulis* est, au contraire, très faible. Les équations (40), (41), (53), (54) donnent, en effet, pour λ , β , v_1 , v_2 , une déviation permanente nulle, chacune de ces variables présente une oscillation forcée d'amplitude très faible, puisque leur période propre est de 5 à 10 fois plus grande que celle de la houle. Je substitue ces expressions dans les équations du premier groupe, en remarquant que les termes en $u_1 J_y$ et $u_2 J_y$ de l'équation (51) sont de l'ordre de ceux que j'ai convenu de négliger, la variation de u_1 et de u_2 étant très lente. J'obtiens ainsi pour θ , u_1 , u_2 une déviation permanente nulle, et pour ζ une déviation extrêmement faible, provenant des termes en $J_x \lambda$, $J_x v_1$, $J_x v_2$, $J_x J_y$ de l'équation (51). Les trois premiers de ces termes ont une influence très faible, puisque les amplitudes de λ , v_1 , v_2 sont petites; l'influence du terme $J_x J_y$ est faible par suite de son coefficient $\varpi (E - F)$.

71. Remarque. — Comme l'étude précédente vient de le montrer, le compas Anschütz présente, à côté de qualités remarquables dues à sa grande stabilité, des défauts importants, relatifs à l'ordre de grandeur de ses déviations balistiques.

Ces déviations étant dues, en grande partie, à son système amortisseur, il semble qu'il serait possible d'y remédier simplement en munissant d'une soupape commandée électriquement chacun des huit petits tubes qui traversent les cloisons de la cuve : on pourrait ainsi empêcher l'huile de s'écouler pendant une évolution du bâtiment, puis la libérer sitôt après l'évolution terminée. On ne serait pas astreint à utiliser cette commande : on y aurait recours exceptionnellement, lorsqu'on aurait besoin de toute la précision du compas.

L'amortissement des oscillations transversales intervient favorablement dans les termes du second ordre des déviations balistiques : il y a intérêt à réaliser un amortissement important. Comme on l'a vu, on ne peut compter sur la cuve à huile.

On pourrait munir le flotteur d'une seconde cuve analogue, présentant un étranglement *dans le plan méridien*. L'écoulement de l'huile dans cette cuve serait réglé de manière à réaliser le maximum d'amortissement des oscillations transversales.

On pourrait aussi augmenter l'amortissement propre des ressorts des gyros Est et Ouest, par exemple, en les enfermant dans de petits cylindres, et munissant leurs extrémités de pistons se déplaçant avec frottement dans les cylindres; il serait facile de les disposer de manière qu'il n'en résultât aucune indétermination de la position d'équilibre des gyros.

On pourrait aussi remplacer la cuve par deux systèmes indépendants S, S' de vases communicants, l'un de ces systèmes étant dans le vertical $\mathcal{NS}$, l'autre dans le vertical $\mathcal{E-O}$.

Si l'on désigne par u la hauteur de liquide dans le système S, par v la hauteur dans S', la mise en équations, entièrement analogue à celle qui a été indiquée pour le Slough (§ 51), conduit à deux groupes d'équations entièrement distincts, l'un de ces groupes en ζ, θ, u , l'autre λ, β, v ; de sorte qu'on pourra régler séparément les deux systèmes de vases de manière à réaliser l'amortissement maximum de chacun des deux groupes de variables (voir note 48, p. 46).

Pour le système de vases S, on augmenterait sa période propre en allongeant le tube de communication, diminuant son diamètre, et surtout en entravant l'écoulement pour augmenter l'influence des frottements intérieurs.

Il y aurait enfin intérêt, en vue des déviations balistiques, à augmenter la période de l'oscillation transversale. Il semble que ce soit possible.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

- H. ANSCHÜTZ-KÄMPFE... 1. Der Kreisel als Richtungsweiser... *Jahrbuch der Schiffbau-techn. Ges.* 10 (1909), p. 352 à 361.
— 2. Der Kreiselkompass. *Ann. der Hydr. u. marit. Meteor.*, Berlin, 37 (1909), p. 366 à 369.
- P. APPELL..... 1. *Traité de mécanique rationnelle* (4 vol.) Paris, (2^e éd.) 1 (1902), 2 (1904).
— 2. *Les mouvements de roulement en dynamique*, Paris (1899).
— 3. Sur une forme générale des équations de la dynamique. *J. reine u. angew. Math.*, 121 (1899), p. 310 à 319; *J. math. pures appl.*, 6 (1900), p. 5 à 40; 7 (1901), p. 1 à 12; *C. R. Acad. sc.*, Paris, 129 (1899), p. 317 à 320; p. 423 à 427.
— 4. Sur les liaisons exprimées par..., *C. R. Acad. sc.*, Paris, 152 (1911), p. 1197 à 1199; *Palermo Rendic.*, 32 (1911), p. 48 à 50.
— 5. Sur les liaisons cachées..., *C. R. Acad. sc.*, Paris, 162 (1916), p. 27 à 29.
- A. BAULE..... 1. Cours de gyro-compas (autogr.). *École des off. torp.*, Toulon (1921).
- H. BEGHIN..... 1. *Statique et Dynamique* (2 vol.), Paris (1921).
— 2. Sur les compas gyr. Anschütz et Sperry, *C. R. Acad. sc.*, Paris, 173 (1921), p. 288 à 290.
- G. BROWN..... 1. The gyrostatic compas. *R. Institution of Gr. Brit. weekly even. meet.* (30 janv. 1920).
- E. DELASSUS..... 1. *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels*, Paris (1913).
— 2. Sur les liaisons et les mouvements..., *Ann. Éc. norm.*, Paris, 29 (1912), p. 305 à 370; 30 (1913), p. 489 à 520; *C. R. Acad. sc.*, Paris, 152 (1911), p. 1739 à 1743; 156 (1913), p. 205 à 209; p. 677 à 679.
- E. DUBOIS..... 1. Sur le gyroscope marin, *C. R. Acad. sc.*, Paris, 98 (1884), p. 227 à 229.
- G. K. B. ELPHINSTONE... 1. A Demonstration of... Anschütz gyro-compas. *Proc. of phys. soc.*, London, 23 (1911), p. 201 à 203.
- D. FLIR..... 1. Der Kreiselkompass. *Mitteilungen aus dem Gebiet des Seewe-sens* (1914), p. 1070 à 1165.
- A. FÖPPL..... 1. Über einen Kreiserversuch..., *Sitzungsber. Kgl. bayer. Akad. Wiss. München* (math. phys.), 34 (1904), p. 5 à 28; *Phys. Zeitschr.*, Leipzig, 5 (1904), p. 416 à 425.
- L. FOUCAULT..... 1. Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouve-ment de la terre ... *C. R. Acad. sc.*, Paris, 35 (1852), p. 421 à 427.
- H. FRAHM..... 1. Neuartige Schlingertanks..., *Jahrb. der Schiffbautechn. Ges.*, Berlin, 12 (1911), p. 283 à 358.
- GEYER..... 1. Der Kreisel als Kompass. *Marine Rundschau*, 2, (1912), p. 1099 à 1116.

- Ph. GILBERT..... 1. Étude historique et critique de la rotation..., *Ann. soc. sc.*, Bruxelles, 2 (1878), p. 255; 6 (1881), p. 270 à 374; 7 (1883), p. 11 à 110; *Rev. des quest. sc.*, 11 (1882), p. 353 à 393; *Bull. sc. math.*, Paris, 6 (1882), p. 189 à 224.
- R. E. GILLMOR..... 1. *The Sperry gyrocompass in service*, New-York (lecture).
- A. GRAY..... 1. *Gyrostatics and Rotational motion*, London (1918).¹
- J. HADAMARD..... 1. Sur les mouvements de roulement, *Mém. Soc. des sc. phys. et nat.*, Bordeaux (4), 5 (1895).
- G. B. HARRISON..... 1. *The gyrocompass*, London (1917) (His Majesty's Stationery office).
- M. IVEN..... 1. *Theoretische Betrachtungen über die Wirkungsweise des Kreiselkompasses*, Kiel (1914).
- F. KLEIN U. A. SOMMERFELD. 1. *Über die Theorie des Kreisels*, Leipzig, 3 (1903), 4 (1910).
- H. LAMB..... 1. The theory of the gyroscope. *Proc. r. soc.*, Edinburgh, 35 (1914), p. 153 à 161.
- F. LAUFFER..... 1. Das Gyroskop, *Mitteil. aus dem Gebiet des Seewesens* (1908), p. 499 à 538; (1909), p. 646 à 662.
- 2. Der Kreiselkompass..., Anschütz, *id.* (1910), p. 937.
- A. LECHNER..... 1. Über die Richtkraft eines... Kreisels, *Sitzber. der Krl. Akad. Wiss. Wien*, abh. II^a, 124 (3-9) 1915, p. 279 à 286.
- M. LE LAS..... 1. *Note sur le compas gyroscopique* Anschütz, Paris (1910).
- P. LEMAIRE...?..... 1. Théorie des compas gyroscopiques, *Rev. marit.*, 190 (1911), p. 600 à 642; 191 (1911), p. 34 à 72.
- A. LEPELLETIER..... 1. *Théorie élémentaire du Sperry*, 19 (1921), p. 66 à 79; 20 (1921), p. 227 à 239.
- A. LUCAS..... 1. *Des phénomènes gyroscopiques et de leurs principales applications à la navigation*, Paris (1918).
- F. MANGUET..... 1. Les applications du gyroscope dans la marine, *Rev. gén. des sc.*, Paris, 28 (1917), p. 230 à 242.
- O. MARTIENSSEN..... 1. Die Verwendbarkeit des Rotationskompasses..., *Phys. Zeitschr.*, Leipzig, 7 (1906), p. 535 à 543.
- 2. Der Kreiselkompass..., *Elektrotechn. Zeitschr.*, München, 32 (1911), p. 863 à 866; p. 887 à 890.
- 3. Die Theorie des Kreiselkompasses, *Zeitschr. für Instrumentenkunde*, Berlin, 32 (1912), p. 309 à 321.
- H. MAURER..... 1. Der Kreisel als Kompassersatz... *Meereskunde*, Berlin, 5 (1911) [7], p. 1 à 32.
- L. M. NULTON..... 1. Some notes on the principle of the gyroscopic compass..., *Proc. U. S. Institute*, 41 (1915) Nr. 5.
- A. PERI..... 1. Bussola giroscopica Anschütz, *Rivista marittima*, 3 (1911), p. 184 à 188.
- J. PELUCHON..... 1. Étude sur les compas gyroscopiques, *Rev. marit.* (Partie secrète et technique) Paris (n° 1, déc. 1920), p. 83 à 111.
- M. PINEAU..... 1. Le compas gyroscopique de la marine allemande, *Rev. gén. des sc.*, Paris, 23 (1912), p. 624 à 626.
- 2. La substitution du compas gyroscopique..., *Rev. du mois*, Paris, 19 (1914), p. 689 à 705.
- H. RÉSAL..... 1. *Traité de mécanique générale* (6 vol.), Paris, 1 (1873).
- O. SCHLICK..... 1. Der Schiffskreisel. *Jahrb. der Schiffbautechn. Ges.*, Berlin, 10 (1909), p. 1105 et 1106.

- M. SCHULER..... 1. (Annexe théorique à l'article de H. Anschütz-Kaempfe, 1), *Jahrb. der Schiffbautechn. Ges.*, 10 (1909), p. 561 à 576.
- E. A. SPERRY..... 1. The gyroscope for marine purposes. *Engineering*, London, p. 427 à 432.
- 2. Neue form des Kreiselkompasses. *Elektrotechn. Zeitschr.*, 33 (1912), p. 1114; 34 (1913), p. 224 et 225.
- P. STEINDEL... 1. Der Kreiselkompass. *Zeitschr. phys. u. chem. Unterr.*, Berlin, 25 (1912), p. 116 à 122.
- J. J. TAUDIN-CHABOT... 1. A gyrodynamic solution of... Mariner's compass. *Philos. mag.*, London, 18 (1909), p. 729 à 739.
- W. THOMSON (LORD KELVIN) et P. G. TAIT. 1. *Treatise on Natural Philosophy* (2 vol.) Cambridge (2^e éd.), 1 (1903).
- W. THOMSON..... 2. A gyrostatic model of a magnetic compass, *Nature*, London, 30 (1884), p. 524.
- A. WINKELMANN..... 1. *Handbuch der Physik*, Breslau, 1 (1891).
1. *Encyklopaedie der math. Wiss.*, Leipzig, t. IV, 4^e vol., fasc. 6 et 7.
2. *Lehrbuch der Navigation für Deckoffizierschulen*, Berlin, 1917.
3. *Lehrbuch für den Unterr. in der Navigation an der kaiserl. Marineschule*, Berlin, 1917.
4. Der Kreiselkompass als neueste... *Nauticus* (1913), p. 416 à 440.
5. *Der Kreiselkompass* (publ. par Anschütz et C^o), Kiel (1910).
6. *Le compas gyroscopique Anschütz* (trad. publ. par le Ministère de la Marine), Paris (1917).
7. *The Sperry gyrocompass and navigation equipment* (publ. par la Sperry gyr. Co.), New-York (1915).
8. *The Sperry gyrocompass. Elementary theory and complete description...* (Sperry C^o), London (1916).
9. *Le compas gyroscopique Sperry. Théorie élémentaire...* (trad. par le Ministère de la Marine), Paris (1917).
10. *Instructions pour le compas gyroscopique système Sperry* (Sperry C^o), London (1916).
11. *The Sperry gyrocompass Mark III* (Sperry C^o), New-York.
12. *Elementary theory of two-gyro compass* (Sperry C^o).
13. *Le compas à deux gyroscopes Sperry, modèle III* (polycop. par le Ministère de la Marine), Paris.
14. *The Sperry gyrocompass* (Sperry C^o), London, 1920.
15. The Sperry gyrocompass, *Engineering*, London, 91 (1911), p. 816 à 818; 93 (1912); p. 722 à 727; *Soc. of Naval Architects...* New-York, 20 (1912) Nr. 14; *Proc. U. S. Naval Institute*, New-York (1911), p. 845; (1912), p. 519; (1914), p. 141.
16. *The Sperrycope* (Sperry C^o), New-York (period.).
17. The gyrostatic compass. *Engineering*, London, 109 (1920), p. 202 à 206.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Congruences de droites et de sphères

Vu et approuvé :

Paris, le 2 Juin 1922,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. MOLLIARD

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 2 Juin 1922,

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

Pour le Recteur,

L'INSPECTEUR D'ACADÉMIE,

MAURELLET

